



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



NYPL RESEARCH LIBRARIES



3 3433 06630764 0





DEA

FRANC





OE A

Franch











**ANNALES**

**SCIENTIFIQUES**

**DE**

**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.**





*1<sup>er</sup> série (Périodique)*

# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

## L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

---

Publication fondée en 1864 par M. PASTEUR,  
et continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE.

---

<sup>3</sup>  
TROISIÈME SÉRIE.

<sup>7</sup>  
TOME SEPTIÈME. — ANNÉE 1890.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890 *w*

(Tous droits réservés.)



- 4233 -

## COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAÎTRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

### Sciences mathématiques.

MM.  
P. APPELL, Prof. à la Sorbonne.  
J. BERTRAND, de l'Institut.  
O. BONNET, de l'Institut.  
G. DARBOUX, de l'Institut.  
E. GOURSAT.  
CH. HERMITE, de l'Institut.  
G. KÖNIGS.  
E. PICARD, de l'Institut.  
L. RAFFY.  
J. TANNERY, Sous-Dir. à l'École.  
F. TISSERAND, de l'Institut.

### Sciences physiques.

MM.  
M. BERTHELOT, de l'Institut.  
E. BOUTY, Prof. à la Sorbonne.  
M. BRILLOUIN.  
H. DUFET.  
C. FRIEDEL, de l'Institut.  
D. GERNEZ.  
P. HAUTEFEUILLE, Prof. à la Sorbonne.  
A. JOLY.  
E. MASCART, de l'Institut.  
L. TROOST, de l'Institut.  
J. VIOLLE.

### Sciences naturelles.

MM.  
G. BONNIER, Prof. à la Sorbonne.  
J. COSTANTIN.  
A. DASTRE, Prof. à la Sorbonne.  
A. DES CLOIZEAUX, de l'Institut.  
H. DE LACAZE-DUTHIERS, de l'Institut.  
A. GIARD.  
MUNIER-CHALMAS.  
L. PASTEUR, de l'Institut.  
E. PERRIER, Prof. au Muséum.  
G. PORCHET, Prof. au Muséum.  
P. VAN TIEGHEM, de l'Institut.

## ADMINISTRATION.

|   |                       |
|---|-----------------------|
| MM. CH. HERMITE, de l'Institut, Professeur à la Sorbonne..... | <i>Directeur.</i>     |
| GAUTHIER-VILLARS.....   | <i>Trésorier.</i>     |
| G. DARBOUX, de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.....      | } <i>Secrétaires.</i> |
| D. GERNEZ, Maître de Conférences à l'École Normale.....       |                       |
| P. HAUTEFEUILLE, Professeur à la Sorbonne.....                |                       |



# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

## L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

### SUR LES SURFACES

DONT

### LA COURBURE TOTALE EST CONSTANTE,

PAR M. G. DARBOUX (').

---

#### I.

On connaît les beaux résultats obtenus, depuis Monge, par un grand nombre de géomètres, en ce qui concerne la détermination et l'étude des surfaces minima. La théorie des surfaces dont la courbure totale est constante a les rapports les plus étroits avec celle des surfaces minima, bien qu'elle soit certainement de beaucoup plus difficile.

Par exemple, la détermination des surfaces minima dépend de l'équation

(1)  $s = e^z,$

que l'on sait intégrer; celle des surfaces à courbure constante se ramène, d'après M. Weingarten, à l'équation

$$s = ae^z + be^{-z},$$

qui comprend évidemment la précédente comme cas particulier.

---

(1) Extrait du Tome XCVII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.  
*Ann. de l'Éc. Normale*. 3<sup>e</sup> Série. Tome VII. — JANVIER 1890.

Parmi les considérations de Géométrie qui permettent aussi d'établir un lien entre les deux problèmes, je signalerai d'abord la suivante : On sait qu'il existe toujours deux surfaces dont la courbure *moyenne* est constante et qui sont parallèles à une surface dont la courbure totale est constante. On voit donc que la détermination des surfaces à courbure totale invariable se ramène à celle des surfaces dont la courbure moyenne est constante : or ces dernières comprennent évidemment comme cas particulier les surfaces minima.

On peut aussi se placer au point de vue de la Géométrie projective. Considérons une surface du second ordre  $(Q)$  et proposons-nous de déterminer les surfaces  $(\Sigma)$  telles que les deux tangentes aux lignes asymptotiques qui passent en chacun de leurs points soient conjuguées par rapport à la surface  $(Q)$ . Cet intéressant problème se ramène, il est aisé de le reconnaître, à la détermination d'une surface à courbure constante ou, ce qui est la même chose, à l'intégration de l'équation (2). Mais, si l'on suppose que la surface  $(Q)$  dégénère et se réduise au cercle de l'infini, les surfaces  $(\Sigma)$ , d'après leur définition, devront avoir leurs tangentes asymptotiques rectangulaires et se réduiront, par conséquent, à des surfaces minima.

Je reviendrai sur toutes ces analogies. Mais, pour le moment, je me contenterai de rappeler que la détermination des surfaces à courbure constante exige l'intégration de l'équation (2) et que tous les efforts tentés jusqu'ici pour l'intégration de cette équation ou de celles dans lesquelles on peut la transformer ont complètement échoué. Ces efforts ont néanmoins conduit à des résultats très intéressants, et l'on connaît aujourd'hui différents procédés qui permettent, une surface à courbure constante étant supposée et donnée, d'en déduire une infinité d'autres ayant la même propriété.

Le premier de ces procédés se présente presque immédiatement. Il est clair que, si  $f(x, y)$  est une solution de l'équation (2), il en sera de même de  $f\left(\frac{x}{m}, ym\right)$ , où  $m$  désigne une constante arbitraire. Cette remarque a déjà été faite par M. Lie et elle permet évidemment d'atteindre le résultat cherché. Toutefois, il est utile de le remarquer, les surfaces que l'on fait ainsi dériver d'une surface donnée ne sont pas complètement connues : on a bien les valeurs des six quantités qui

figurent dans les formules de M. Codazzi, mais la détermination des trois coordonnées rectilignes d'un point de la surface en fonction des deux coordonnées curvilignes n'est pas faite et exige l'intégration, qui peut bien être impossible, d'une équation de Riccati. Avant de terminer ce qui regarde cette première méthode, remarquons, avec M. Lie, qu'elle se rattache de la manière la plus directe à un beau résultat obtenu par M. Bonnet. Dans son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables*, M. Bonnet a généralisé une propriété qu'il avait déjà établie pour les surfaces minima; il a montré que toute surface à courbure moyenne constante quelconque a ses lignes de courbure isothermes, et que l'on peut toujours en déduire une infinité de surfaces à courbure moyenne constante qui sont applicables sur la surface donnée avec conservation des rayons de courbure principaux aux points correspondants. Il suffit de considérer les surfaces à courbure totale constante parallèles aux précédentes, et il est aisé de reconnaître qu'elles se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par le procédé que nous venons de rappeler plus haut.

Il existe une autre méthode bien plus féconde et qui permet de déduire d'une surface à courbure constante donnée une infinité d'autres surfaces de même définition et contenant dans leur équation autant de constantes que l'on veut. Elle a été donnée en 1879 par M. Bianchi et elle a été l'objet d'études approfondies de la part de MM. Lie et Backlund. On peut la faire reposer sur deux théorèmes presque identiques qui ont été donnés, l'un en 1870 par M. Ribaucour, l'autre en 1879 par M. Bianchi. Indiquons rapidement comment M. Bianchi y a été conduit.

Soit  $(\Sigma)$  une surface à courbure négative  $-1$  et dont on connaisse les lignes géodésiques. On pourra, d'une infinité de manières, mettre l'élément linéaire de cette surface sous la forme

$$ds^2 = dx^2 + e^{x^2} d\beta^2.$$

Menons toutes les tangentes aux lignes géodésiques  $\beta = \text{const.}$  D'après une des propriétés les mieux connues des lignes géodésiques, ces tangentes sont normales à une surface  $(S)$  et elles touchent une seconde surface  $(\Sigma')$  de telle manière que  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$  constituent les deux nappes de la surface des centres de courbure de  $(S)$ . M. Bianchi démontre que  $(\Sigma')$  est, comme  $(\Sigma)$ , une surface de courbure constante



— 1. On voit donc déjà que l'on pourra déduire de  $(\Sigma)$  une surface  $(\Sigma')$  contenant dans son équation une constante arbitraire. Si l'on recommence l'application du même procédé en prenant  $(\Sigma')$  comme surface initiale, on obtiendra des surfaces  $(\Sigma'')$  dépendant de deux constantes, et il est clair, sans qu'il soit nécessaire d'insister, que l'application indéfinie du procédé peut introduire autant de constantes que l'on veut. M. Lie a fait la remarque capitale que l'application de ce procédé exige seulement une série de quadratures. C'est sur cette suite de quadratures que portent surtout les recherches nouvelles que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie. Mais, auparavant, je montrerai comment on peut établir géométriquement, de la manière la plus simple, la proposition de M. Bianchi et celle, bien antérieure, de M. Ribaucour.

## II.

Pour démontrer l'élégante proposition de M. Bianchi, je m'appuierai sur la remarque suivante. Considérons sur une surface  $(\Sigma)$  un système de courbes parallèles  $(C)$  et les lignes géodésiques  $(g)$  qui sont leurs trajectoires orthogonales. Les tangentes aux lignes  $(g)$  sont normales à une certaine surface  $(S)$  et touchent une seconde surface  $(\Sigma')$ ;  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$  sont les deux nappes de la surface des centres de courbure de  $(S)$ . En outre,  $(\Sigma')$  est le lieu des centres de courbure géodésique des courbes parallèles  $(C)$  tracées sur  $(\Sigma)$ . Il est clair d'ailleurs que la relation est réciproque : si l'on considère sur  $(\Sigma')$  les lignes géodésiques  $(g')$  tangentes aux normales de  $(S)$  et leurs trajectoires orthogonales  $(C')$ , les centres de courbure géodésique de ces trajectoires sont sur la surface primitive  $(\Sigma)$ .

Cela posé, cherchons s'il existe une surface  $(\Sigma)$  sur laquelle on puisse tracer des courbes parallèles  $(C)$  ayant en chacun de leurs points un rayon de courbure géodésique constant, égal à 1 par exemple. Si l'on rapporte la surface au système de coordonnées formé de ces courbes parallèles et de leurs trajectoires orthogonales, l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2,$$

et l'on devra avoir

$$\frac{\partial C}{\partial u} = \pm C,$$

**ANNALES**

**SCIENTIFIQUES**

**DE**

**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.**

Le théorème donné par M. Ribaucour en 1870 (*Comptes rendus et Bulletin de la Société philomathique*) peut s'énoncer comme il suit :

*Considérons une surface  $(\Sigma)$  à courbure  $-1$ , et traçons dans chaque plan tangent de la surface un cercle de rayon 1 ayant son centre au point de contact M de ce plan tangent; les cercles ainsi obtenus seront orthogonaux à une famille de surfaces, toutes à courbure constante  $-1$ ; et, en outre, ces surfaces feront partie d'un système triple orthogonal dont les deux autres familles seront évidemment composées de surfaces enveloppes de sphères.*

La première partie de cette proposition résulte immédiatement du théorème de M. Bianchi, car les différentes surfaces  $(\Sigma')$  qu'on fait dériver de  $(\Sigma)$  dans la méthode de M. Bianchi sont évidemment les trajectoires des cercles considérés par M. Ribaucour. Au reste, les deux propositions se déduisent l'une de l'autre, celle de M. Ribaucour contenant en plus ce qui concerne le système triple orthogonal.

Dans mon Cours de l'année 1881-82, j'ai donné du théorème de M. Ribaucour une démonstration géométrique directe, qui se rapproche, à quelques égards, de celle qu'on trouve dans un travail récent de M. Backlund. Je ne la transcrirai pas ici, mais je ferai connaître le principe d'une démonstration analytique qui n'est pas moins simple que la démonstration géométrique.

Supposons que la surface  $(\Sigma)$  ait été rapportée à ses lignes de courbure. Son élément linéaire prendra la forme connue

$$(3) \quad ds = \cos^2 \omega \, du^2 + \sin^2 \omega \, dv^2,$$

où  $\omega$  satisfait à l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \sin \omega \cos \omega = 0.$$

Menons dans le plan tangent en un point M une ligne MM', de longueur  $+1$ , faisant l'angle  $\theta$  avec la courbe  $v = \text{const.}$  qui passe en M, et écrivons que le point M' décrit une surface dont le plan tangent passe en M et est normal à celui de  $(\Sigma)$ . Nous trouverons les deux équations

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = \sin \theta \cos \omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\cos \theta \sin \omega. \end{cases}$$

Il est aisé de reconnaître que ces équations sont compatibles toutes les fois que  $\omega$  satisfait à l'équation (4) et qu'elles donnent une valeur de  $\theta$  contenant, outre  $u$  et  $v$ , une constante arbitraire  $\alpha$ . Si nous considérons maintenant  $u, v, \alpha$  comme des coordonnées curvilignes propres à définir le point  $M'$ , nous aurons, pour le déplacement  $dS$  de ce point, l'expression

$$(6) \quad dS^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2.$$

Cette formule, qui met en évidence un système triple orthogonal, démontre le théorème de M. Ribaucour; elle montre aussi que la transformation de M. Bianchi conserve à la fois les lignes de courbure et les lignes asymptotiques.

Il reste à discuter le système (5).

### III.

Dans l'article précédent, j'ai été conduit au système suivant

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = \sin \theta \cos \omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\cos \omega \cos \theta, \end{cases}$$

qui va me permettre de me placer à un point de vue purement analytique dans l'étude du problème, objet principal de ces recherches.

Considérons le système (1) comme formé de deux équations simultanées auxquelles doit satisfaire la fonction inconnue  $\theta$ : l'élimination de la fonction  $\theta$  nous montrera que ces deux équations ne sont compatibles que dans le cas où  $\omega$  satisfait à l'équation

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \sin \omega \cos \omega = 0.$$

Réciproquement, si  $\omega$  est une solution quelconque de cette équation aux dérivées partielles, l'intégration du système (1) nous donnera une valeur de  $\theta$  contenant une constante arbitraire; et cette valeur de  $\theta$  sera également une solution de l'équation (2). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

*De toute solution  $\omega$  de l'équation (2) on peut déduire une solution nou-*

velle contenant une constante arbitraire : c'est la valeur la plus générale de  $\theta$  satisfaisant aux équations (1).

A la vérité, on ne sait pas intégrer d'une manière générale le système (1), mais la forme des équations qui le composent nous permet de reconnaître que l'on pourra obtenir la valeur la plus générale  $\theta'$  de  $\theta$  qui puisse y satisfaire dès que l'on en connaîtra une solution particulière quelconque  $\theta$ .

Effectuons, en effet, les quadratures définies par les formules

$$(3) \quad \begin{cases} d\alpha = \cos \theta \cos \omega du + \sin \omega \sin \theta dv, \\ e^{-\alpha} d\beta = \cos \omega \sin \theta du - \sin \omega \cos \theta dv, \\ e^{\alpha} d\gamma = \cos \theta \sin \omega du + \sin \theta \cos \omega dv. \end{cases}$$

La solution cherchée  $\theta'$  est donnée par l'équation

$$(4) \quad \cot \frac{\theta' - \theta}{2} = \beta e^{-\alpha},$$

qui contient la constante arbitraire que l'on peut toujours ajouter à  $\beta$ .

Si, dans les formules (3), on remplace  $\theta$  par  $\theta'$ , les nouvelles valeurs  $\alpha'$ ,  $\beta'$  de  $\alpha$  et de  $\beta$  seront données par les équations

$$(5) \quad e^{\alpha'} = \frac{e^{\alpha}}{\beta^2 + e^{2\alpha}}, \quad \beta' = \frac{-\beta}{\beta^2 + e^{2\alpha}}.$$

Mais, pour obtenir la nouvelle valeur  $\gamma'$  de  $\gamma$ , il faudra effectuer une nouvelle quadrature.

On peut encore, dans le système (1), considérer  $\theta$  comme donné et chercher la valeur la plus générale de  $\omega$  qui satisfasse aux deux équations. On aura ainsi, en désignant cette valeur par  $\omega''$ ,

$$(6) \quad \cot \frac{\omega'' - \omega}{2} = \gamma e^{\alpha},$$

et, si nous désignons par  $\alpha''$ ,  $\gamma''$  les valeurs nouvelles de  $\alpha$ ,  $\gamma$  que l'on obtient en remplaçant, dans les formules (3),  $\omega$  par  $\omega''$ , on aura

$$(7) \quad e^{-\alpha''} = \frac{e^{-\alpha}}{\gamma^2 + e^{-2\alpha}}, \quad \gamma'' = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + e^{-2\alpha}}.$$

Mais, pour obtenir la nouvelle valeur  $\beta''$  de  $\beta$ , il restera, ici encore, à effectuer une quadrature nouvelle.

## COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAÎTRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

### Sciences mathématiques.

MM.  
P. APPELL, Prof. à la Sorbonne.  
J. BERTRAND, de l'Institut.  
O. BONNET, de l'Institut.  
G. DARBOUX, de l'Institut.  
E. GOURSAT.  
CH. HERMITE, de l'Institut.  
G. KOENIGS.  
E. PICARD, de l'Institut.  
L. RAFFY.  
J. TANNERY, Sous-Dir. à l'École.  
F. TISSERAND, de l'Institut.

### Sciences physiques.

MM.  
M. BERTHELOT, de l'Institut.  
E. BOUTY, Prof. à la Sorbonne.  
M. BRILLOUIN.  
H. DUFET.  
C. FRIEDEL, de l'Institut.  
D. GERNEZ.  
P. HAUTEFEUILLE, Prof. à la Sorbonne.  
A. JOLY.  
E. MASCART, de l'Institut.  
L. TROOST, de l'Institut.  
J. VIOLLE.

### Sciences naturelles.

MM.  
G. BONNIER, Prof. à la Sorbonne.  
J. COSTANTIN.  
A. DASTRE, Prof. à la Sorbonne.  
A. DES CLOIZEAUX, de l'Institut.  
H. DE LACAZE-DUTHIERS, de l'Institut.  
A. GIARD.  
MUNIER-CHALMAS.  
L. PASTEUR, de l'Institut.  
E. PERRIER, Prof. au Muséum.  
G. PORCHET, Prof. au Muséum.  
P. VAN TIEGHEM, de l'Institut.

## ADMINISTRATION.

|  |                       |
|--|-----------------------|
| MM. CH. HERMITE, de l'Institut, Professeur à la Sorbonne ..... | <i>Directeur.</i>     |
| GAUTHIER-VILLARS .....   | <i>Trésorier.</i>     |
| G. DARBOUX, de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.....       | } <i>Secrétaires.</i> |
| D. GERNEZ, Maître de Conférences à l'École Normale.....        |                       |
| P. HAUTEFEUILLE, Professeur à la Sorbonne.....                 |                       |

Nous supposerons que toutes ces quadratures soient calculées de la manière la plus générale, c'est-à-dire qu'on ajoute une constante arbitraire après chaque intégration.

Ces définitions une fois admises, supposons que l'on substitue partout à  $\theta$  la valeur  $\theta'$  définie par la formule (4). Les nouvelles valeurs  $b'_i$ ,  $c'_i$  des fonctions  $b_i$ ,  $c_i$  seront définies par les formules (5) et les relations très simples qui suivent :

$$\begin{aligned} b'_1 &= \gamma, \\ b'_2 &= c_1 - \beta\gamma^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ b'_n &= c_{n-1} - \beta(c_{n-2}b'_1 + c_{n-3}b'_2 + \dots + c_0b'_{n-1}), \\ c'_0 &= \gamma' = b_1, \\ c'_1 &= b_2 + \beta'b_1^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ c'_n &= b_{n+1} + \beta'(c'_{n-1}b_1 + \dots + c'_0b_n). \end{aligned}$$

Lorsque, au contraire, on substituera le système  $(\omega'', \theta)$  au système  $(\omega, \theta)$ , les formules que l'on aura à employer pour calculer les nouvelles valeurs de  $b_i$ ,  $c_i$ , toutes pareilles aux précédentes, s'en déduiront par la substitution des quantités  $-\alpha, \gamma, \beta, c_i, b_i$  à  $\alpha, \beta, \gamma, b_i, c_i$  respectivement.

Il suffit maintenant de commencer les calculs qui conduisent aux nouvelles solutions, pour reconnaître que ces calculs n'exigeront plus aucune quadrature.





---

SUR UNE

**CLASSE PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS**

**AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,**

**DONT LES INVARIANTS SONT ÉGAUX,**

PAR M. C. GUICHARD,  
CHARGÉ D'UN COURS A LA FACULTÉ DE CLERMONT-FERRAND.

---

Les équations qui sont étudiées dans cette Note sont

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \rho \sin \varphi,$$

dans lesquelles  $\varphi$  est une solution quelconque de l'équation

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \cos \varphi = 0.$$

Si l'on différentie l'équation (2), soit par rapport à  $u$ , soit par rapport à  $v$ , on voit immédiatement que  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  sont des solutions particulières de l'équation (1). Je vais démontrer de plus qu'étant donnée une solution de l'équation (1), on peut, en général, et en effectuant seulement des quadratures, en déduire une infinité d'autres.

Soit, en effet,  $\rho$  une des solutions de (1). Posons

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Les deux équations (5) sont compatibles, car elles donnent toutes deux, en tenant compte des relations (1) et (2),

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = -\rho \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u};$$

elles permettent de déterminer  $\lambda$  par une quadrature. Cela posé, je dis que

$$(4) \quad r = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

est une solution de l'équation (1). En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial v} &= -\frac{\partial}{\partial u} (\rho \sin \varphi) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \\ &= -\sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} - \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \lambda \cos \varphi \\ &= -\sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} - \lambda \cos \varphi \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = -\sin \varphi \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \cos \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} = r \sin \varphi.$$

Il est aussi évident maintenant que, si l'on pose

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial u} = \rho \cos \varphi, \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} \end{cases}$$

et

$$(4') \quad s = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} + \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$s$  est encore une solution de l'équation (1).

Appliquons maintenant la transformation (4') à la solution  $r$ . On aura pour déterminer  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \left( -\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \cos \varphi = \frac{\partial}{\partial u} \left[ -\cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \sin \varphi \right], \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \left[ \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \cos \varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left[ -\cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \sin \varphi \right]; \end{aligned}$$

d'où

$$\theta = -\cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \sin \varphi + K,$$

$K$  étant une constante.

On aura ensuite

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 r}{\partial v^2} &= \sin \varphi \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \lambda \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \cos \varphi \\ &= \rho + \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \lambda \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \end{aligned}$$

et alors

$$s = -\frac{\partial^2 r}{\partial v^2} + \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \rho + K \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

En faisant abstraction du terme  $K \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ , on peut dire que les transformations (4) et (4') sont inverses l'une de l'autre. L'application répétée des transformations (4) ou des transformations (4') donnera, en général, une infinité de solutions nouvelles.

Si l'on prend

$$\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

on trouvera aussi

$$r = \frac{\partial \varphi}{\partial v};$$

la méthode ne donne rien de nouveau. Au contraire, la valeur de  $s$  est une nouvelle solution.



---

SUR LA CONVERGENCE  
DES  
DÉVELOPPEMENTS DES INTÉGRALES ORDINAIRES

D'UN  
SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES,

PAR  
M. MÉRAY,  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON,

avec la collaboration de

M. RIQUIER,  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN <sup>(1)</sup>.

---

**Généralités.**

1. Un système d'équations différentielles est dit *immédiat* quand toutes ses équations sont du premier ordre et fournissent immédiatement certaines dérivées des fonctions inconnues, exprimées en fonctions composées des variables indépendantes, de ces fonctions inconnues elles-mêmes et de leurs autres dérivées.

Quand ce sont *toutes* les dérivées des fonctions inconnues qui se trouvent ainsi exprimées par les équations données, aucune dérivée ne peut figurer dans leurs seconds membres, qui sont alors essentiellement finis, et l'on a un *système d'équations différentielles totales*.

Quand, au contraire, c'est *une partie* seulement de ces dérivées qui constituent les premiers membres des équations données, les autres

---

<sup>(1)</sup> Ce Mémoire, relatif aux systèmes d'équations différentielles partielles, fait suite à un autre Mémoire, relatif aux systèmes d'équations différentielles totales, et publié dans les *Annales de l'École Normale* (novembre et décembre 1889). Les chiffres suivis d'un astérisque renvoient le lecteur aux divisions du Mémoire de 1889, et les chiffres non suivis d'un astérisque à celles du présent Mémoire.

dérivées peuvent, en totalité ou en partie, entrer dans les seconds membres, qui sont alors éventuellement différentiels; et, au lieu d'un système d'équations différentielles totales, on a ce que nous appellerons un *système d'équations différentielles partielles*. Ces systèmes sont ceux dont nous allons nous occuper, en complétant la définition de leur caractère *immédiat* par une restriction essentielle que nous spécifierons au moment voulu (8).

Pour disposer nettement les équations d'un pareil système, il faut les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, dont les lignes correspondent aux variables indépendantes, et les colonnes aux fonctions inconnues, en plaçant l'équation qui a, par exemple,  $\frac{ds}{dt}$  pour premier membre dans la case qui appartient à la fois à la ligne ( $t$ ) et à la colonne ( $s$ ). Des cases en nombre quelconque et occupant des positions arbitraires peuvent évidemment rester inoccupées dans ce Tableau.

2. Dans un système d'équations différentielles partielles, il y a, relativement à chaque fonction inconnue, une distinction essentielle à faire entre les diverses variables indépendantes.

Nous appellerons variables *principales* d'une fonction inconnue déterminée celles par rapport auxquelles sont prises les dérivées de cette fonction qui constituent dans le Tableau du système les premiers membres des équations de la colonne correspondante. Pour la même fonction, toutes les autres variables seront *paramétriques*. Par exemple, si les variables indépendantes sont  $x, y, z, t$  seulement et si la colonne ( $s$ ) ne contient que les deux équations :

|     |                       |
|-----|-----------------------|
|     | (s)                   |
| (x) | $\frac{ds}{dx} \dots$ |
| (y) |                       |
| (z) | $\frac{ds}{dz} \dots$ |
| (t) |                       |

la fonction inconnue  $s$  aura  $x, z$  pour variables principales,  $y, t$  pour variables paramétriques.

Le partage dont il s'agit ne s'effectue pas nécessairement de la même manière pour toutes les fonctions inconnues, telle variable pouvant fort bien être à la fois principale pour une de ces fonctions et paramétrique pour une autre.

3. Cette distinction entre les variables en entraîne une non moins importante entre les diverses dérivées d'un même ordre quelconque  $k$  d'une fonction inconnue déterminée. Nous appellerons *genre* de l'une de ces dérivées le nombre de ses différentiations génératrices, distinctes ou non, qui doivent être effectuées par rapport à des variables principales de la fonction dont il s'agit.

D'après cela, l'ordre  $k$  des dérivées de cette fonction contient : 1° le seul genre 0 si pour elle toutes les variables sont paramétriques ; 2° les  $k + 1$  genres

$$0, 1, 2, \dots, k,$$

si les variables sont les unes paramétriques et les autres principales ; 3° le seul genre  $k$  si toutes les variables sont principales.

Dans un ordre quelconque, nous appellerons aussi *paramétriques* les dérivées de genre 0, et *principales* toutes celles de genre  $> 0$ .

Enfin, nous nommerons quelquefois *classe* d'une dérivée principale le nombre

$$\frac{k(k-1)}{2} + x,$$

où  $k$  et  $x$  désignent respectivement l'ordre et le genre de la dérivée considérée. Partageons en groupes les dérivées principales de toutes les fonctions inconnues, en plaçant dans un même groupe celles qui sont à la fois du même ordre et du même genre ; puis, rangeons ces divers groupes de telle manière qu'en passant de l'un quelconque d'entre eux au suivant l'ordre des dérivées ne décroisse jamais, et que leur genre aille en augmentant si les deux groupes appartiennent au même ordre : cela étant, la classe d'une dérivée principale déterminée se trouve être précisément égale au rang du groupe qui la contient.

Dans l'exemple ci-dessus, la fonction inconnue  $s$  a, dans le premier



ordre, les dérivées de genre 0 ou paramétriques

$$\frac{ds}{dy}, \quad \frac{ds}{dt},$$

et les dérivées principales de genre 1

$$(\alpha) \quad \frac{ds}{dx}, \quad \frac{ds}{dz}.$$

Elle a, dans le second ordre, les dérivées de genre 0 ou paramétriques

$$\frac{d^2s}{dy^2}, \quad \frac{d^2s}{dy dt}, \quad \frac{d^2s}{dt^2},$$

les dérivées principales de genre 1

$$(\beta) \quad \frac{d^2s}{dx dy}, \quad \frac{d^2s}{dx dt}, \quad \frac{d^2s}{dz dy}, \quad \frac{d^2s}{dz dt},$$

et les dérivées principales de genre 2

$$(\gamma) \quad \frac{d^2s}{dx^2}, \quad \frac{d^2s}{dx dz}, \quad \frac{d^2s}{dz^2};$$

et ainsi de suite.

Enfin, les dérivées principales des groupes  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  sont respectivement celles des classes 1, 2, 3.

4. D'après ce qui précède, *les équations différentielles d'un système immédiat partiel expriment toutes les dérivées principales premières des fonctions inconnues en fonctions composées des variables indépendantes, de ces mêmes fonctions inconnues et de tout ou partie de leurs dérivées paramétriques premières.*

5. La distinction entre les divers groupes d'intégrales d'un système immédiat d'équations différentielles partielles s'opère suivant les mêmes règles et a les mêmes conséquences que pour les équations différentielles totales.

Les intégrales seront dites *ordinaires*, si les valeurs des variables indépendantes, prises conjointement avec les valeurs correspondantes des intégrales elles-mêmes et de leurs dérivées paramétriques pre-

mieres, n'excèdent les limites d'olotropie d'aucune des composantes figurant dans les seconds membres, tout au moins tant que les variables indépendantes restent comprises entre certaines limites.

Les intégrales seront dites *singulières*, si, dans les mêmes circonstances, les composantes des seconds membres ne restent jamais olotropes en même temps.

Les intégrales ordinaires peuvent seules faire l'objet d'une théorie générale; elles vont maintenant nous occuper exclusivement.

6. La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations d'un système immédiat partiel en transforme tous les seconds membres en des fonctions composées, habituellement différentielles, des variables, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques premières. D'après la définition même des intégrales ordinaires, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables à ces seconds membres (tout au moins entre certaines limites), et l'on peut, en conséquence (15\*), *différencier indéfiniment les relations du système partiel considéré*.

Les nouvelles équations ainsi obtenues, jointes à celles du système, fournissent certaines expressions *de toutes les dérivées principales des intégrales*; car, des différentiations convenables, exécutées sur une équation convenablement choisie, peuvent évidemment amener dans le premier membre une dérivée principale déterminée; *mais elles n'en fournissent jamais pour leurs dérivées paramétriques*, parce que les dérivées principales du premier ordre, qui forment les premiers membres des équations différentielles proposées, sont toutes du genre 1, et que ce genre ne pourra jamais diminuer par des différentiations quelles qu'elles soient.

Si donc on veut employer toutes ces équations à la reconstruction des développements des intégrales ordinaires considérées, *il faut de toute nécessité connaître non seulement leurs valeurs initiales, mais encore celles de toutes leurs dérivées paramétriques*. Il faut encore que ces équations puissent être rangées dans un ordre de succession tel que chacune ne contienne dans son second membre (outre les variables indépendantes, les intégrales et leurs dérivées paramétriques) que les dérivées principales figurant dans les premiers membres des équations antérieures.

Si l'on veut, comme au n° 25\*, trouver par la méthode des coefficients indéterminés tous les groupes d'intégrales ordinaires qui peuvent exister en partant de valeurs initiales arbitrairement choisies pour elles et leurs dérivées paramétriques de tous ordres, la seconde des conditions ci-dessus énoncées est encore nécessaire au succès de l'opération.

7. Dans la théorie des équations différentielles totales, nous n'avons pas eu à nous préoccuper de la seconde condition, parce que la succession voulue s'est trouvée réalisée d'elle-même, en rangeant les formules dites *primitives* d'après leurs ordres croissants. Mais ici, les choses se passent d'une manière infiniment moins simple, parce que la présence des dérivées paramétriques dans les seconds membres des équations du système immédiat partiel considéré rend généralement l'ordre du second membre égal à celui du premier dans les relations qui s'en déduisent par différentiations. Et il arrive effectivement que cette seconde condition n'est pas remplie pour certains systèmes de la nature de ceux que nous avons définis au n° 1.

Nous les excluons absolument de nos raisonnements, et nous réserverons désormais le nom de systèmes *immédiats* à ceux qui satisfont à la condition générale dont il s'agit.

8. La restriction qu'il faut ajouter à la définition du n° 1, pour qu'elle devienne celle d'un système immédiat dans le sens ci-dessus expliqué, consiste à exclure de divers seconds membres certaines dérivées paramétriques. Nous ne sommes pas en mesure de la formuler d'une manière absolument générale et précise; mais il nous suffira, et au delà, de considérer les systèmes satisfaisant à la condition que :

*u, v désignant deux fonctions inconnues quelconques, aucune dérivée (paramétrique) de v ne figure dans les seconds membres des équations de la colonne (u), si quelque variable principale de v est paramétrique pour u.*

Tous ces systèmes, comme nous allons incessamment le constater, remplissent la seconde des conditions énoncées au n° 6, et, pour plus

de simplicité dans le langage, ce sont eux seuls que désormais nous qualifions d'*immédiats*.

9. Éclaircissons ce qui précède par quelques exemples.

Le système

|     | (u)   | (v) |
|-----|---|-----|
| (x) | $\frac{du}{dx} = U_x\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}\right) \quad \Bigg $ |     |
| (y) | $\frac{dv}{dy} = V_y\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}\right)$              |     |

qui satisfait à la définition du n° 1, n'est pas de ceux que maintenant nous nommerons *immédiats*, soit parce que  $\frac{dv}{dx}$  figure dans le second membre de l'équation de la colonne (u), bien que la variable  $y$ , qui est principale pour  $v$ , soit paramétrique pour  $u$ , soit encore parce que  $\frac{du}{dy}$  figure dans le second membre de l'équation de la colonne (v).

Au contraire, le système

|       | (u)  | (v) |
|-------|--|-----|
| (1) { | $\frac{du}{dx} = U_x\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}\right) \quad \Bigg $ |     |
| (y)   | $\frac{dv}{dy} = V_y\left(x, y, u, v, \frac{dv}{dx}\right)$              |     |

rentre dans la catégorie dont il s'agit, nonobstant la similitude complète de ce Tableau et du précédent, parce que  $\frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$  ont disparu respectivement des seconds membres des colonnes (u), (v).

Il en est de même plus généralement toutes les fois que dans les équations de chaque colonne ne figurent les dérivées (paramétriques) d'aucune des fonctions inconnues qui correspondent aux autres colonnes.

Tel est encore le système

$$\begin{array}{c}
 (u) \qquad \qquad \qquad (v) \\
 (2) \left\{ \begin{array}{l} (x) \quad \frac{du}{dx} = U_x \left( x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy} \right) \quad \left| \quad \frac{dv}{dx} = V_x \left( x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy} \right) \\ (y) \quad \hline \end{array} \right.
 \end{array}$$

malgré la présence de toutes les dérivées paramétriques dans les seconds membres.

De même, plus généralement, tout système dans lequel le partage des variables (en principales et paramétriques) s'opère de la même manière relativement à toutes les fonctions inconnues.

C'est dans cette dernière catégorie que se rangent les équations dites *aux dérivées partielles*, soit isolées, soit simultanées. Le Tableau contient alors soit une, soit plusieurs colonnes dans lesquelles toutes les cases d'une même ligne sont seules occupées.

A la rigueur, on peut encore y placer les systèmes d'équations différentielles totales, puisque dans un pareil système, les variables sont toutes principales pour chacune des fonctions inconnues.

10. Il est à remarquer que, sauf le cas d'un système différentiel total, le nombre des dérivées paramétriques pouvant éventuellement figurer dans les seconds membres d'un système immédiat donné est au moins égal à 1 pour chacun de ces derniers. Considérons, en effet, une équation quelconque du système, et supposons qu'elle ait pour premier membre une dérivée de la fonction  $u$ , par exemple : si, pour cette dernière, les variables indépendantes ne sont pas toutes principales, le second membre pourra contenir les dérivées paramétriques de  $u$ , et, dans le cas contraire, il pourra contenir les dérivées paramétriques de toutes les autres fonctions.

11. Il nous faut approfondir maintenant la question effleurée au n° 8.

Considérons une relation différentielle subsistant entre les diverses

fonctions d'un groupe d'intégrales ordinaires du système immédiat donné et à laquelle la règle des fonctions composées soit applicable, et supposons qu'elle satisfasse en outre aux deux conditions ci-après :

1° Le premier membre est une dérivée principale de quelque intégrale, et les diverses dérivées qui, outre les variables indépendantes et les intégrales elles-mêmes, figurent éventuellement dans le second membre, sont, les unes d'ordres inférieurs à celui du premier, les autres d'ordre égal, mais de genres moindres.

2° Si l'on considère, d'une part, la fonction dont une certaine dérivée principale figure dans le premier membre, et, d'autre part, l'ensemble des fonctions dont quelque dérivée principale ou paramétrique d'ordre égal figure dans le second membre de la relation dont il s'agit, toutes les variables qui sont paramétriques pour la première fonction le sont aussi pour chacune des dernières.

Pour abrégé, nous appellerons *immédiate* toute relation différentielle satisfaisant à cette double condition, comme aussi l'expression fournie par elle pour la dérivée principale contenue dans son premier membre. Nous nommerons en outre *classe* d'une relation immédiate celle de la dérivée principale en question.

12. Les relations immédiates jouissent de deux propriétés importantes que nous allons démontrer :

1° *Toute relation déduite d'une relation immédiate par des différentiations quelconques est elle-même immédiate.*

Il suffit, évidemment, d'examiner le cas où le nombre des différentiations se réduit à 1.

Or, en vertu de la seconde des conditions énoncées au numéro précédent, si cette différentiation n'augmente pas le genre de la dérivée figurant dans le premier membre de la relation sur laquelle on l'exécute, elle n'augmentera pas non plus le genre des dérivées d'ordre égal qui peuvent figurer dans le second; et, si elle augmente d'une unité le genre de la première, elle augmentera d'une unité au plus le genre de chacune des dernières. Donc, après comme avant la différentiation, les dérivées figurant dans le second membre seront, les unes d'ordres inférieurs au premier, les autres d'ordre égal mais de genres

moindres, et la première condition ne cessera pas d'être satisfaite. Quant à la seconde, la chose s'aperçoit immédiatement sans qu'il soit nécessaire d'insister.

2<sup>o</sup> *Toute relation déduite d'une relation immédiate en substituant à telles ou telles des dérivées principales qui figurent dans le second membre de cette dernière des expressions immédiates quelconques des dérivées en question est elle-même immédiate.*

Nous désignerons par  $(\omega)$  la relation immédiate sur laquelle on effectue les substitutions dont parle l'énoncé : il suffit évidemment d'examiner le cas où le nombre de ces dernières se réduit à 1. Cela étant, puisque la première des conditions énoncées au numéro précédent se trouve satisfaite dans les deux relations que l'on combine, elle le sera nécessairement encore dans celle qui résulte de leur combinaison. Quant à la seconde, en désignant par  $k$  l'ordre de la relation  $(\omega)$ , elle ne cessera évidemment pas d'être satisfaite si l'on effectue dans le second membre une substitution portant sur quelque dérivée d'ordre inférieur à  $k$ . Examinons ce qui arrive lorsqu'on y effectue une substitution portant sur quelque dérivée d'ordre  $k$ . A cet effet, soient

$$\delta_k u = f(\dots, \delta_k v, \dots)$$

la relation  $(\omega)$ ;  $\delta_k v$  l'une des dérivées d'ordre  $k$  contenues dans son second membre;

$$\varphi(\dots, \delta_k u, \dots)$$

une expression immédiate de  $\delta_k v$ ; et  $\delta_k w, \dots$  les dérivées d'ordre  $k$  qui figurent dans cette dernière. La relation  $(\omega)$  étant immédiate, ainsi que l'expression considérée de  $\delta_k v$ , toute variable paramétrique pour  $u$  l'est aussi pour  $v$ , et, l'étant pour  $v$ , l'est pour  $w, \dots$ . La seconde condition ne cesse donc pas d'être satisfaite après qu'on a substitué à  $\delta_k v$  l'expression immédiate dont il s'agit.

13. Soient  $(\omega)$  une relation immédiate de classe  $j + 1$ ;  $(A)$  un système de relations immédiates en nombre fini, toutes de classes inférieures à  $j + 1$ , et fournissant une expression au moins pour chaque dérivée principale des classes 1, 2, ...,  $j$ . Des relations  $(A)$  extrayons



un groupe  $(A')$  fournissant pour chacune de ces dernières une expression et une seule; dans le second membre de  $(\omega)$ , substituons aux dérivées dont il s'agit leurs expressions tirées de  $(A')$ , et répétons l'opération en faisant successivement pour le groupe  $(A')$  tous les choix possibles. L'ensemble des opérations que nous venons d'indiquer s'appellera, pour abréger, *remplacer dans la relation  $(\omega)$  les dérivées principales des classes  $1, 2, \dots, j$  par leurs expressions tirées de  $(A)$* .

14. Cela posé, supposons les équations données identiquement satisfaites par quelque groupe d'intégrales ordinaires: substituons ces intégrales aux fonctions inconnues correspondantes dans les diverses équations du système, et désignons indifféremment par  $(A_1)$  ou  $(B_1)$  l'ensemble des relations immédiates qui résultent de cette substitution. Effectuons ensuite sur chacune de celles-ci et de toutes les manières possibles une différentiation (première) susceptible d'amener dans le premier membre quelque dérivée principale de seconde classe, et soient  $(A_2)$  le groupe des relations résultantes,  $(B_2)$  celui qu'on obtient en remplaçant dans chacune des relations  $(A_2)$  les dérivées principales de première classe par leurs expressions tirées de  $(B_1)$  (13): en vertu des deux propositions démontrées au n° 12, le groupe total  $[(A_2), (B_2)]$  fournit des expressions immédiates pour les diverses dérivées principales de seconde classe. Effectuons maintenant sur les diverses relations des groupes

$$(A_1) \text{ ou } (B_1), (A_2), (B_2)$$

toute différentiation (première) susceptible d'amener dans le premier membre quelque dérivée principale de troisième classe, et soient  $(A_3)$  le groupe des relations résultantes,  $(B_3)$  celui qu'on obtient en remplaçant dans chacune des relations  $(A_3)$  les dérivées principales des deux premières classes par leurs expressions tirées de  $(B_1), (B_2)$ : le groupe total  $[(A_3), (B_3)]$  fournira de même des expressions immédiates pour les diverses dérivées principales de troisième classe. Et ainsi de suite indéfiniment.

15. Dans le groupe indéfini

$$(3) \quad (A_1), (A_2), (A_3), \dots,$$



nous distinguerons : 1° le sous-groupe des relations *primitives*, obtenu en adjoignant aux relations du système proposé toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations; 2° le sous-groupe des relations *intermédiaires*, composé de toutes les autres du groupe (3).

Nous nommerons *ultimes* les relations

$$(3 \text{ bis}) \quad (B_1), (B_2), (B_3), \dots$$

dont les seconds membres ne contiennent aucune dérivée principale.

Désignant par

$$(C_1), (C_2), (C_3), \dots$$

les relations primitives des classes respectives 1, 2, 3, ..., nous aurons encore à considérer le groupe

$$(D_1), (D_2), (D_3), \dots,$$

entièrement composé de relations ultimes, et défini comme il suit : les relations  $(D_1)$  coïncident, comme  $(C_1)$ , avec celles du système proposé  $(A_1)$  ou  $(B_1)$ ; les relations  $(D_2)$  s'obtiennent en remplaçant dans  $(C_2)$  les dérivées principales de première classe par leurs expressions tirées de  $(D_1)$  (13); les relations  $(D_3)$ , en remplaçant dans  $(C_3)$  les dérivées principales des deux premières classes par leurs expressions tirées de  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ ; et ainsi de suite indéfiniment. Les relations  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ ,  $(D_3)$ , ... ainsi obtenues se nommeront *primitivo-ultimes*.

Nous désignerons enfin par  $(\Gamma)$ , faute d'une dénomination appropriée, le groupe obtenu en adjoignant aux relations  $(C_1)$ ,  $(B_2)$  et  $(C_3)$  toutes celles qui se déduisent de  $(B_2)$  et  $(C_3)$  par de simples différentiations. Les formules du groupe  $(\Gamma)$  autres que  $(B_2)$  font toutes partie du groupe (3).

Les expressions fournies pour les dérivées principales des intégrales ordinaires du système donné par les diverses relations ci-dessus définies seront affectées des dénominations correspondantes.

16. Sur ces diverses relations et expressions, il importe de faire les remarques suivantes :

1° Parmi les différentiations qui concourent à engendrer une dérivée principale, on peut distinguer les différentiations principales et les différentiations paramétriques : si celles de la première sorte intéressent

toutes *une seule* variable, la dérivée principale est dite *simple*; si elles intéressent au contraire *plusieurs* variables distinctes, la dérivée est dite *complexe*. Cela étant, on apercevra facilement, comme au n° 23°, qu'*une dérivée simple a une seule expression primitive, tandis qu'une dérivée complexe en a autant que ses différentiations génératrices intéressent de variables principales distinctes.*

2° Il n'existe pas d'expressions intermédiaires pour les dérivées principales du premier et du second ordre.

Dans le premier ordre, les relations primitives, comme les relations ultimes, coïncident avec les équations du système donné.

Dans le second ordre, le nombre des expressions ultimes d'une dérivée principale quelconque est précisément égal au nombre de ses expressions primitives, c'est-à-dire à 1 ou à 2 suivant que cette dérivée est simple ou complexe. Effectivement, si la dérivée considérée est du premier genre (et par suite nécessairement simple), la seule manière d'en obtenir une expression ultime consiste à remplacer dans son expression primitive les dérivées principales du premier ordre par leurs valeurs tirées des équations proposées. Si la dérivée considérée est du second genre, toutes ses expressions ultimes s'obtiennent en éliminant de ses diverses expressions primitives tant les dérivées principales du premier ordre que celles du second ordre et du premier genre : or chacune des dérivées à éliminer n'admet, comme nous venons de le voir, qu'une seule expression ultime.

Dans les ordres supérieurs au second, la multiplicité des expressions d'une même dérivée complexe s'accroît lorsqu'on passe des formules primitives aux formules ultimes, ainsi que nous l'avons remarqué pour les équations différentielles totales. Mais, de plus, pour un système immédiat partiel, cette multiplicité peut s'étendre même aux dérivées simples, parce que leurs expressions primitives peuvent fort bien renfermer des dérivées complexes, susceptibles, comme nous l'avons vu, de plusieurs expressions ultimes.

3° Toute expression primitive, intermédiaire ou ultime, est entière par rapport aux composantes des seconds membres du système donné et à leurs dérivées partielles, comme aussi (lorsqu'il y a lieu) par rapport aux diverses dérivées des intégrales qui ne sont pas à la fois paramétriques et du premier ordre.

4° Les variables  $x, y, \dots$ , les fonctions inconnues  $u, v, \dots$  et leurs dérivées principales ou paramétriques de tous ordres étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes, pour que les formules primitives et intermédiaires soient vérifiées par des valeurs particulières données des variables dont il s'agit, il faut et il suffit que les formules ultimes le soient.

Les groupes (3) et (3 bis) sont ainsi équivalents l'un à l'autre.

5° Le groupe des relations primitives équivaut de même soit à celui des relations primitivo-ultimes, soit à celui des relations (F) (15).

6° Nous nommerons simple tout groupe indéfini de relations primitives, intermédiaires ou ultimes, fournissant, pour chaque dérivée principale, une expression et une seule. Si l'on attribue aux variables, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques des valeurs numériques quelconques, les relations successives d'un pareil groupe, rangées d'après leurs classes croissantes, fournissent pour chaque dérivée principale une valeur numérique déterminée et une seule.

Si, sans attribuer de valeur numérique particulière à aucune de ces diverses quantités, on élimine du second membre de chaque équation les dérivées principales qui y figurent à l'aide des équations antérieures, on obtient un groupe simple équivalent au premier, et entièrement composé de relations ultimes.

17. A partir de valeurs initiales données  $x_0, y_0, \dots$  des variables indépendantes, les développements par la série de Taylor des intégrales ordinaires dont on admet l'existence pour le système immédiat considéré, peuvent être reconstruits dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres.

Effectivement, les seconds membres des formules ultimes ne contenant que les variables indépendantes, les intégrales et leurs dérivées paramétriques, l'hypothèse numérique  $x = x_0, y = y_0, \dots$  les transforme tous en des quantités connues et fait connaître, par suite, les valeurs initiales de leurs premiers membres, c'est-à-dire de toutes les dérivées principales des intégrales dont il s'agit.

En résumé, on connaît donc ainsi les valeurs initiales de ces intégrales et de toutes leurs dérivées sans distinction, c'est-à-dire ce qui est nécessaire pour construire les développements cherchés.

18. Quand les variables principales d'une intégrale prennent leurs valeurs particulières initiales, cette intégrale se réduit à une fonction de ses seules variables paramétriques, que nous nommerons sa *détermination initiale*. Dans le système (1), par exemple, la détermination initiale de  $u$  est une fonction de  $y$ , celle de  $v$  une fonction de  $x$ . Dans le système (2), celles des intégrales  $u, v$  sont toutes deux des fonctions de  $y$ .

Si, pour une certaine intégrale, toutes les variables de la question sont principales, sa détermination initiale se réduit à une constante : c'est ce qui arrive toujours dans un système d'équations différentielles totales.

Si, pour une autre, les variables sont toutes paramétriques, sa détermination initiale est fonction de toutes les variables.

19. *La connaissance des déterminations initiales de toutes les intégrales permet aussi bien la reconstruction de leurs développements.*

Il est clair, en effet, que les valeurs initiales d'une intégrale et de ses dérivées paramétriques sont précisément celles de sa détermination initiale et de ses dérivées de tous ordres. La connaissance des déterminations initiales équivaut donc exactement à celle des valeurs initiales des intégrales et de leurs dérivées paramétriques, laquelle, d'après le théorème du n° 17, suffit à la reconstruction de leurs développements.

20. Au lieu de reconstruire, comme nous venons de l'indiquer, les développements d'intégrales dont l'existence est supposée connue, cherchons maintenant s'il existe quelque système d'intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales des fonctions de leurs divers groupes de variables paramétriques *choisies au hasard, mais jouissant, bien entendu, de la double propriété d'être toutes olotropes pour les valeurs initiales des variables indépendantes, et d'avoir, ainsi que leurs dérivées premières, des valeurs initiales qui, prises conjointement avec celles des variables, laissent aussi olotropes les composantes des seconds membres des équations données.*

*Un pareil système d'intégrales, lorsqu'il existe, est évidemment unique, et son existence dépend des trois conditions suivantes, comme s'il s'agissait d'un système total.*

I. *Nonobstant la multiplicité des expressions ultimes d'une même dérivée principale d'une intégrale hypothétique (16, 2°), les valeurs initiales qu'elles fournissent de diverses manières pour cette dérivée doivent toujours être numériquement égales les unes aux autres.*

II. *Les développements construits par la méthode des coefficients indéterminés, comme s'il s'agissait d'une simple reconstruction (17), doivent avoir quelque système de rayons de convergence tous différents de zéro.*

III. *Leurs sommes doivent satisfaire effectivement à toutes les équations du système immédiat proposé.*

La dernière de ces trois conditions ne peut manquer d'être remplie si les deux premières le sont, alors même qu'on se bornerait à considérer dans celles-ci les valeurs initiales fournies par les seules formules primitivo-ultimes. Effectivement, les valeurs initiales des variables indépendantes, des fonctions définies par les développements dont nous venons de parler, et de leurs dérivées principales ou paramétriques de tous ordres, vérifient par hypothèse les formules primitivo-ultimes, donc aussi (16, 5°) les formules primitives. La substitution des fonctions considérées dans chaque équation du système en transforme donc les deux membres en des fonctions de  $x, y, \dots$  numériquement égales, ainsi que leurs dérivées semblables, pour  $x = x_0, y = y_0, \dots$  et, par suite, identiquement égales entre elles (7\*).

Nous n'avons ainsi à nous occuper que des deux premières conditions.

21. La réalisation de la première peut s'opérer soit par une adaptation convenable de la nature des fonctions choisies pour déterminations initiales des intégrales hypothétiques à celle des seconds membres des équations du système, soit par une corrélation spéciale entre les seconds membres, en vertu de laquelle la condition dont il s'agit se trouve remplie indépendamment du choix des fonctions prises pour déterminations initiales.

Nous exprimerons l'existence de cette dernière corrélation en disant que le système immédiat proposé est *passif*. Quant aux intégrales ordinaires des systèmes non passifs, qui sont loin d'exister toujours, nous les nommerons *exceptionnelles*, comme nous l'avons fait au n° 27° pour les équations différentielles totales.



22. *Pour qu'un système immédiat d'équations différentielles partielles soit passif, il faut et il suffit que les deux expressions ultimes de chaque dérivée complexe seconde d'une fonction inconnue quelconque soient égales identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques premières et secondes, ces trois sortes de quantités étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes.*

Si le système est passif, les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale, et en particulier de chaque dérivée complexe du second ordre, doivent être identiquement égales, d'où résulte immédiatement que la condition posée est nécessaire. Nous prouverons qu'elle est suffisante en raisonnant comme il suit.

Toute expression ultime d'une dérivée principale s'obtient en différentiant un certain nombre de fois l'une des équations proposées, et remplaçant après quelques-unes de ces différentiations, en particulier après la dernière, les dérivées principales qui figurent dans le second membre par telles ou telles de leurs expressions ultimes. Cela posé :

1. *Si l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale a lieu jusqu'à la classe  $j > 1$  inclusivement, toutes les expressions ultimes d'une dérivée déterminée de classe  $j + 1$ , obtenues en effectuant sur une même équation du système proposé l'opération ci-dessus indiquée, sont identiquement égales entre elles de quelque manière que cette opération soit conduite.*

1° En premier lieu, si l'on n'opère de substitutions qu'après avoir opéré la dernière différentiation, la relation ultime à laquelle on est conduit est toujours la même; car la formule primitive résultant des seules différentiations est indépendante de l'ordre dans lequel on les exécute, et pour chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à  $j + 1$ , qu'on en doit éliminer, les diverses expressions ultimes sont par hypothèse identiques.

2° Si l'on ne change pas l'ordre relatif des différentiations, le résultat de l'opération ci-dessus indiquée est indépendant de toutes les autres conditions dans lesquelles on l'effectue.

Supposons en effet que les différentiations, dont nous désignerons le nombre par  $k$ , soient exécutées dans un ordre déterminé, certaines d'entre elles étant suivies de substitutions déterminées; soient  $x$  celle des variables indépendantes par rapport à laquelle la dernière doit avoir lieu, et

$$(4) \quad \partial_k = f(x, y, \dots, u, v, \dots, \sigma, \dots, \tau, \dots)$$

la relation immédiate sur laquelle on a à l'exécuter. Dans cette formule  $\partial_k$  désigne une certaine dérivée principale d'ordre  $k$ , et  $\sigma, \dots, \tau, \dots$  les diverses dérivées respectivement principales et paramétriques dont le caractère immédiat de la relation autorise la présence dans le second membre. Les dérivées  $\frac{d\sigma}{dx}, \dots$  et celles des dérivées  $\frac{d\tau}{dx}, \dots$  qui sont principales sont au plus de la classe  $j$ ; car elles figurent éventuellement dans le second membre de la relation immédiate que l'on déduit de (4) au moyen d'une différentiation relative à  $x$ , et, par suite, sont de classes inférieures au premier membre  $\frac{d\partial_k}{dx}$  qui est de classe  $j+1$ . Chacune de ces dérivées, comme aussi chacune des dérivées principales  $\sigma, \dots$ , a donc une expression ultime unique, d'où résulte en particulier que, si l'on désigne par

$$\Sigma, \dots, \Sigma_x, \dots$$

les expressions ultimes des dérivées

$$\sigma, \dots, \frac{d\sigma}{dx}, \dots,$$

et par  $\left(\frac{d\Sigma}{dx}\right), \dots$  les résultats que donne la règle des fonctions composées quand on effectue sur  $\Sigma, \dots$  une différentiation relative à  $x$ , les diverses expressions ultimes  $\Sigma_x, \dots$  peuvent s'obtenir en éliminant respectivement des diverses expressions  $\left(\frac{d\Sigma}{dx}\right), \dots$  les dérivées principales (de classes nécessairement inférieures à  $j$ ) qui peuvent y figurer.

Cela posé, au lieu de différentier par rapport à  $x$  la relation (4), ce

qui donne

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx} + \dots + \frac{df}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dx} + \dots + \frac{df}{d\tau} \frac{d\tau}{dx} + \dots,$$

puis de remplacer, d'une part, les dérivées principales  $\sigma, \dots, \frac{d\sigma}{dx}, \dots$  par les expressions ultimes  $\Sigma, \dots, \Sigma_x, \dots$ , d'autre part, celles des dérivées  $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \dots, \frac{d\tau}{dx}, \dots$  qui sont principales par les expressions ultimes correspondantes, il revient évidemment au même de différentier par rapport à  $x$  la relation

$$\delta_k = f(x, y, \dots, u, v, \dots, \Sigma, \dots, \tau, \dots),$$

ce qui donne

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx} + \dots + \frac{df}{d\Sigma} \left( \frac{d\Sigma}{dx} \right) + \dots + \frac{df}{d\tau} \frac{d\tau}{dx} + \dots,$$

puis de remplacer par leurs expressions ultimes les dérivées principales qui peuvent alors figurer dans le second membre.

Ainsi on peut, sans changer le résultat, remplacer dans le second membre de (4) les dérivées principales par leurs expressions ultimes, ce qui donnera une expression ultime de  $\delta_k$ , effectuer seulement alors la dernière différentiation, et remplacer finalement par leurs expressions ultimes les dérivées principales introduites par cette différentiation dans le second membre. Si l'on observe maintenant que  $\delta_k$ , puis les dérivées dont il s'agit, étant de classes inférieures à  $j+1$ , ne sont susceptibles chacune que d'une expression ultime, le point qui nous occupe se trouve entièrement démontré.

3° Considérons deux quelconques des expressions ultimes dont il s'agit actuellement de constater l'identité, et qui se déduisent, comme nous l'avons expliqué, par différentiations et substitutions, d'une même équation du système proposé. Si, sans changer de part ni d'autre l'ordre relatif des différentiations, on n'opère de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, on tombe sur deux expressions ultimes respectivement identiques aux deux précédentes (2°), et l'on sait d'ailleurs (1°) qu'en procédant ainsi le résultat est indépendant de l'ordre des différentiations.



II. Si l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale a lieu jusqu'à la classe  $j \geq 3$  inclusivement, les deux expressions ultimes d'une même dérivée principale de classe  $j - 1$ , déduites de deux équations distinctes du système proposé par l'opération indiquée plus haut, sont nécessairement identiques.

Supposons, par exemple, que les deux équations dont il s'agit soient

$$(5) \quad \frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{du}{dy} \quad .$$

L'une des différentiations à exécuter sur la première est nécessairement relative à  $y$ , l'une des différentiations à exécuter sur la seconde nécessairement relative à  $x$ , et celles qui restent ont lieu de part et d'autre par rapport aux mêmes variables. Or les expressions ultimes d'une même dérivée principale étant identiques jusques et y compris la classe  $j$ , on peut, sans changer les résultats (I), opérer de la manière suivante sur chacune des équations (5) : 1° effectuer d'abord la différentiation relative à  $y$  s'il s'agit de la première, relative à  $x$  s'il s'agit de la seconde, et remplacer dans les seconds membres les dérivées des deux premières classes par leurs expressions ultimes; 2° exécuter ensuite les différentiations restantes et remplacer finalement dans les seconds membres toutes les dérivées principales par leurs expressions ultimes. En vertu de l'hypothèse, les résultats sont identiques après la première partie de l'opération, et par suite aussi après la deuxième.

III. Pour les trois premières classes (ou, ce qui revient au même, pour les deux premiers ordres), l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes d'une même dérivée principale a lieu d'elle-même si cette dérivée est simple (16, 2°), et résulte de l'hypothèse si cette dérivée est complexe. On en conclura, par l'application répétée des propositions ci-dessus énoncées (I, II), que cette égalité identique a encore lieu pour la quatrième classe, puis pour la cinquième, et ainsi de suite indéfiniment.

23. Une particularité essentielle à noter est que le système proposé est passif sans condition dans le cas où chaque fonction inconnue n'a pas plus d'une seule variable principale. Effectivement, le choix de l'équa-

tion à différentier pour obtenir une dérivée principale déterminée n'a plus alors rien d'arbitraire, et le point à démontrer résulte du numéro précédent (1).

D'une manière générale, le nombre total des conditions de passivité est égal à la somme de ceux qui pour chaque fonction inconnue expriment combien ses variables principales offrent de combinaisons deux à deux. Pour des nombres donnés  $h, g$ , de variables indépendantes et de fonctions inconnues, il peut donc varier de 0, valeur qu'il prend lorsque chaque fonction inconnue n'a pas plus d'une variable principale, à  $g \frac{h(h-1)}{2}$ , valeur qu'il acquiert quand aucune fonction inconnue n'a de variable paramétrique, c'est-à-dire quand le système immédiat est total (29\*).

24. De l'ensemble des formules primitives, intermédiaires et ultimes, extrayons un groupe indéfini fournissant au moins une expression pour chaque dérivée principale, et considérons-y, pour un instant, les variables  $x, y, \dots$ , les fonctions inconnues  $u, v, \dots$  et leurs dérivées principales ou paramétriques de tous ordres, comme autant de variables indépendantes distinctes: lorsque les conditions initiales (19) seront choisies de telle manière que les relations dont il s'agit soient toutes vérifiées quand on substitue, d'une part aux variables  $x, y, \dots$ , aux fonctions  $u, v, \dots$  et à leurs dérivées paramétriques les valeurs initiales données, d'autre part à leurs dérivées principales des valeurs particulières convenables (formant de toute nécessité un système unique), nous dirons qu'il y a, relativement aux conditions initiales dont il s'agit, *concordance numérique* entre les relations du groupe.

Dans un groupe simple, quel qu'il soit, la concordance numérique a lieu d'elle-même relativement à des conditions initiales quelconques.

25. Il nous reste maintenant (20) à examiner si, les conditions initiales étant choisies de manière à assurer la concordance numérique (24) des relations primitivo-ultimes, ou, ce qui revient au même (16, 5°), des relations primitives, les développements qu'on en déduit pour les intégrales hypothétiques sont convergents. C'est là une condition qui n'est pas nécessairement remplie, et, dans les deux

paragraphes qui suivent, nous spécifierons précisément un cas très étendu où elle l'est toujours, et un autre cas où sa réalisation dépend des circonstances particulières du problème.

**Systèmes immédiats qui sont en même temps réguliers ou semi-réguliers.**

**Réduction d'un système immédiat non linéaire à un système immédiat linéaire.**

26. Quand les fonctions inconnues d'un système immédiat peuvent être placées dans un ordre tel que toute variable qui est principale pour l'une d'entre elles le soit aussi pour chacune des précédentes, nous écrirons de gauche à droite dans cet ordre les colonnes correspondantes de son Tableau, et nous dirons qu'il est *régulier*. De cette manière, les fonctions se rassemblent naturellement en groupes jouissant de cette propriété que, pour deux fonctions inconnues quelconques, le partage des variables en principales et paramétriques se fait ou non de la même manière suivant qu'elles appartiennent au même groupe ou à deux groupes différents. A ces divers groupes, et en allant de gauche à droite dans le Tableau, nous assignerons les numéros d'ordre 1, 2, 3, ..., et chacun de ces numéros s'appellera le *rang de régularité* commun des fonctions inconnues du groupe correspondant.

Pour un système de cette espèce, nous écrirons aussi les lignes du Tableau dans un ordre tel que le nombre des cases occupées n'augmente jamais d'une ligne à la suivante quand on le lit de haut en bas. Les variables se rassemblent ainsi en groupes jouissant de cette propriété que deux lignes quelconques du Tableau offrent la même distribution de cases pleines et vides ou des distributions différentes, suivant que les variables qui leur correspondent appartiennent ou non au même groupe. A ces divers groupes de variables nous attribuerons, de même, les *rangs de régularité* 1, 2, 3, ..., en parcourant le Tableau de haut en bas.

Par exemple, le système (2) du n° 9 est régulier; plus généralement aussi tout système dans lequel le partage des variables en principales et paramétriques s'opère de la même façon par rapport à toutes les fonctions inconnues : en pareil cas, ces dernières ont toutes le rang 1,

et les variables indépendantes ont le rang 1 ou 2, suivant qu'elles sont principales ou paramétriques. *Dans cette catégorie se rangent, en particulier, les systèmes d'équations différentielles totales.*

Le système écrit ci-dessous

|     | (u)                     | (v)                     | (w)                     | (s) |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----|
| (x) | $\frac{du}{dx} = \dots$ | $\frac{dv}{dx} = \dots$ | $\frac{dw}{dx} = \dots$ |     |
| (y) | $\frac{du}{dy} = \dots$ | $\frac{dv}{dy} = \dots$ |                         |     |
| (z) | $\frac{du}{dz} = \dots$ |                         |                         |     |
| (t) |                         |                         |                         |     |

est encore régulier s'il est immédiat, c'est-à-dire si les dérivées paramétriques contenues dans les seconds membres d'une colonne quelconque n'appartiennent à aucune des fonctions qui correspondent aux colonnes antérieures. Les fonctions  $u, v, w, s$  y ont respectivement les rangs 1, 2, 3, 4, et de même les variables  $x, y, z, t$ .

Nous appellerons *irrégulier* tout système immédiat non régulier, et *semi-régulier* tout système immédiat et irrégulier pouvant se déduire de quelque système immédiat et régulier par la suppression de certaines équations différentielles. Par exemple, le système (1) du n° 9 est irrégulier; tout système immédiat dont les seconds membres ne contiennent aucune dérivée des fonctions inconnues est nécessairement semi-régulier lorsqu'il n'est pas régulier, car on peut alors l'extraire de quelque système d'équations différentielles totales.

27. Nous dirons encore qu'un système immédiat est *linéaire* quand les dérivées (paramétriques) des fonctions inconnues entrent toutes linéairement dans les équations qui le composent. Chaque second membre se réduit alors à une somme de termes dont l'un est une certaine fonction des variables indépendantes et des fonctions inconnues

seulement, tandis que l'un quelconque des termes restants est le produit d'une semblable fonction par quelque dérivée paramétrique. Par exemple, l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{array}{l} (u) \\ (x) \left[ \frac{du}{dx} = U_x \left( x, y, u, \frac{du}{dy} \right) \right] \\ (y) \end{array}$$

constitue un système linéaire si son second membre est de la forme

$$U_x^{(0)}(x, y, u) + U_x^{(1)}(x, y, u) \frac{du}{dy}.$$

*Il faut aussi rattacher les équations différentielles totales aux systèmes linéaires, puisque leurs seconds membres ne renferment point de dérivées.*

28. Étant donné un système immédiat quelconque, supposons qu'on assigne à ses intégrales ordinaires des conditions initiales choisies au hasard, mais jouissant, bien entendu, de la double propriété énoncée au n° 20. A l'aide des relations contenues dans un groupe simple déterminé de formules primitives, intermédiaires ou ultimes (n° 16, 6°), on peut évidemment, et d'une seule manière, construire des séries entières dont les sommes coïncideront avec les intégrales cherchées, *si toutefois ces dernières existent*; mais on ne peut affirmer que les développements ainsi construits fournissent des intégrales du système proposé avant de s'être assuré et de leur convergence, et de la concordance numérique des formules primitivo-ultimes relativement aux données initiales. Quoi qu'il en soit de cette dernière condition, si celle de convergence se trouve remplie, nous dirons, pour abrégé, que les sommes de nos développements sont des *intégrales fictives* du système en question *satisfaisant aux conditions initiales choisies*.

29. *Tout système partiel jouissant de la triple propriété d'être immédiat, régulier et linéaire, possède un groupe d'intégrales fictives répondant*

*à des conditions initiales données, et construites à l'aide d'un groupe simple donné de relations primitives, intermédiaires ou ultimes.*

Jusques et y compris l'alinéa III du présent numéro, nous supposons simplement que le système partiel auquel nous avons affaire est *immédiat* et *linéaire*, sans nous inquiéter de savoir s'il est régulier ou non. Nous nommerons alors

$[i, l]$  le système dont il s'agit;

$x_0, y_0, \dots$  les valeurs initiales des  $h$  variables indépendantes  $x, y, \dots$ ;

$u_0, v_0, \dots$  celles des  $g$  fonctions inconnues  $u, v, \dots$ ;

$\nu, \zeta, \dots$  les déterminations initiales de ces dernières;

( $\varpi$ ) le groupe simple de formules qui, conjointement avec les déterminations initiales, nous servira à construire les développements en séries des intégrales hypothétiques, et que nous pouvons toujours supposer ne contenir exclusivement que des relations ultimes (n° 16, 6°);

$\psi(x, y, \dots, u, v, \dots), \dots$ , les coefficients des dérivées paramétriques dont le caractère immédiat du système  $[i, l]$  autorise la présence dans les seconds membres de ses diverses équations;

$\omega(x, y, \dots, u, v, \dots), \dots$  les termes indépendants de ces dérivées dans les mêmes seconds membres.

Cela posé, nous démontrerons les points suivants :

1. Si l'on désigne par

$$\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$$

*des constantes positives quelconques, par  $\epsilon$  une constante positive plus petite que 1, et si l'on pose, pour abréger,*

$$\tau = \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(y - y_0) + \dots + \beta_1(u - u_0) + \beta_2(v - v_0) + \dots,$$

$$\Theta(\tau) = \frac{1}{1 - \tau}.$$

*le système différentiel total obtenu en égalant à*

$$(6) \quad \frac{\mu \Theta(\tau)}{1 - \epsilon \Theta(\tau)}$$

les *gh* quantités

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{du}{dx}, & \frac{\beta_2}{\alpha_1} \frac{dv}{dx}, & \dots \\ \frac{\beta_1}{\alpha_2} \frac{du}{dy}, & \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{dv}{dy}, & \dots \\ \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

admet un groupe d'intégrales ordinaires olotropes en  $x_0, y_0, \dots$  et s'y réduisant respectivement à  $u_0, v_0, \dots$ ; les dérivées de tous ordres de ces intégrales ont des valeurs initiales essentiellement réelles, positives et indépendantes des valeurs particulières choisies pour  $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$ .

Effectivement, ce système mis sous forme immédiate est passif, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, et admet par conséquent (n° 31\*) un groupe d'intégrales ordinaires satisfaisant aux conditions initiales dont il s'agit. Si l'on développe maintenant la fonction  $\Theta(\tau)$  suivant la formule

$$1 + \tau + \tau^2 + \dots,$$

et qu'après avoir remplacé  $\tau$  par sa valeur on ordonne par rapport aux puissances de

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \dots, \quad u - u_0, \quad v - v_0, \quad \dots,$$

on voit immédiatement que les valeurs initiales de cette fonction et de ses dérivées de tous ordres sont essentiellement réelles, positives et indépendantes des valeurs particulières choisies pour  $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$ . Il en est de même de la fonction  $\frac{1}{1 - \varepsilon \Theta(\tau)}$ , qu'on peut développer suivant la formule

$$1 + \varepsilon \Theta + \varepsilon^2 \Theta^2 + \dots,$$

par suite enfin du produit  $\mu \Theta(\tau) \frac{1}{1 - \varepsilon \Theta(\tau)}$ , second membre commun à toutes les équations différentielles du système total. Les valeurs initiales des dérivées de tous ordres de nos intégrales jouissent donc, elles aussi, de la propriété énoncée; car, en vertu des formules ultimes appliquées à leur calcul, elles se présentent sous forme d'expressions entières, sans aucun signe —, par rapport aux valeurs initiales de la fonction (6) et de ses dérivées partielles.

II. Les intégrales dont nous venons de constater l'existence vérifient identiquement un système  $[I, L]$ , immédiat et linéaire comme  $[i, l]$ , et présentant avec lui cette seule différence que les diverses fonctions

$$\psi(x, y, \dots, u, v, \dots), \dots, \omega(x, y, \dots, u, v, \dots), \dots$$

s'y trouvent remplacées par des fonctions de la forme  $\lambda\Theta(\tau)$ , ..., où  $\lambda, \dots$  désignent des constantes positives.

Soient, en effet,

$$(8) \quad \frac{du}{dx} = \dots$$

l'une des équations du système  $[i, l]$ ;  $q$  le nombre, au moins égal à 1, des dérivées paramétriques dont le caractère immédiat du système autorise la présence dans le second membre de l'équation (8) (10); et  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$  des quantités positives vérifiant la relation

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_q = \varepsilon.$$

De l'équation

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{du}{dx} = \frac{\mu \Theta(\tau)}{1 - \varepsilon \Theta(\tau)},$$

qui figure dans le système différentiel total défini à l'alinéa I, on tire immédiatement

$$(9) \quad \frac{du}{dx} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \mu \Theta(\tau) + \nu_1 \Theta(\tau) \frac{du}{dx} + \dots + \nu_q \Theta(\tau) \frac{du}{dx}.$$

Comme les diverses quantités  $(\tau)$  deviennent identiquement égales entre elles par la substitution à  $u, v, \dots$  des intégrales considérées, la dérivée  $\frac{du}{dx}$  ne diffère alors que par un facteur constant positif de chacune des  $q$  dérivées qui figurent éventuellement dans le second membre de l'équation (8); rien n'est donc plus facile que d'introduire ces  $q$  dérivées respectivement dans les  $q$  derniers termes de l'équation (9) à la place de  $\frac{du}{dx}$ . On fera des calculs analogues au précédent en considérant l'une après l'autre toutes les équations du système  $[i, l]$ , et il est clair que le système  $[I, L]$  ainsi obtenu satisfera à toutes les conditions énoncées.



Nous nommerons  $v, \dots$  toutes les quantités analogues à  $v_1, v_2, \dots, v_q$  qui figurent dans les seconds membres de ces nouvelles équations;  $\Psi(x, y, \dots, u, v, \dots)$ , ... les coefficients des dérivées paramétriques et  $\Omega(x, y, \dots, u, v, \dots)$ , ... les termes indépendants de ces dérivées dans les mêmes seconds membres; enfin  $Y, \Phi, \dots$  les déterminations initiales, relativement au système  $[1, L]$ , des intégrales dont nous venons de constater l'existence.

*En désignant par  $\lambda', \dots$  celles des constantes  $\lambda, \dots$  qui figurent dans l'une ou l'autre des fonctions  $\Psi(x, y, \dots, u, v, \dots)$ , ..., et par  $\lambda'', \dots$  celles qui figurent dans l'une ou l'autre des fonctions  $\Omega(x, y, \dots, u, v, \dots)$ , ..., on voit immédiatement que les premières ont des expressions indépendantes de  $\mu$ , et les secondes des expressions linéaires par rapport à  $\mu$ .*

III. Soient  $r$  une constante positive inférieure à tous les modules des composantes  $\psi(x, y, \dots; u, v, \dots)$ , ...,  $\omega(x, y, \dots; u, v, \dots)$ , ..., et des déterminations initiales  $v, \varphi, \dots$  pour les valeurs initiales de leurs variables respectives;  $M, \dots$  d'autres constantes positives en même nombre que les fonctions  $\psi, \dots$ , et respectivement supérieures (ou égales) aux modules que ces dernières peuvent acquérir à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon  $r$  ayant pour centres les points  $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$ : il est clair que les constantes  $M, \dots$ , les constantes  $v, \dots$  et les constantes  $\lambda', \dots$  se correspondent respectivement.

*Supposons actuellement que, par un choix convenable des constantes*

$$(10) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g; \varepsilon; v, \dots,$$

*on puisse réaliser à la fois toutes les conditions suivantes : en même temps que la constante  $\varepsilon$  est inférieure à l'unité et que les diverses constantes  $v, \dots$  figurant dans une même équation quelconque du système  $[1, L]$  ont une somme égale à  $\varepsilon$ , comme l'exige la définition du système dont il s'agit, les constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$  sont toutes supérieures (ou égales) à  $\frac{1}{r}$ , et les constantes  $\lambda', \dots$  [dont les valeurs dépendent de celles qu'on attribue à (10)] respectivement supérieures (ou égales) aux constantes  $M, \dots$ .*

*Cela étant, le système  $[i, l]$  admet certainement un groupe d'intégrales*

*fictives répondant aux déterminations initiales  $\upsilon, \varphi, \dots$ , et construites à l'aide des relations (10).*

Effectivement, soient

$N$  une quantité positive supérieure à tous les modules que peuvent acquérir les composantes  $\omega, \dots$  et les dérivées premières des fonctions  $\upsilon, \varphi, \dots$  à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon  $r$  ayant pour centres les valeurs initiales de leurs variables respectives;

$a$  la plus petite des quantités  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ ;

$B$  la plus grande des quantités  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$ .

Prenons enfin pour la constante  $\mu$ , encore indéterminée, une valeur vérifiant l'inégalité

$$(11) \quad \mu > N \frac{B}{a}.$$

Cela étant :

1° Puisque les constantes  $\lambda', \dots$  sont respectivement supérieures aux constantes  $M, \dots$ , et les constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$  toutes supérieures à  $\frac{1}{r}$ , on voit sans peine que, *par rapport aux valeurs initiales  $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$ , les fonctions  $\Psi', \dots$  sont respectivement majorantes (31\*, I) pour les fonctions*

$$1 - \frac{M}{r} \frac{x - x_0 + y - y_0 + \dots + u - u_0 + v - v_0 + \dots}{r}, \quad \dots,$$

qui, à leur tour et en vertu du même raisonnement qu'au n° 31\* (II), sont respectivement majorantes *pour les fonctions  $\psi, \dots$* . D'autre part, les constantes  $\lambda'', \dots$ , au moins égales à  $\mu \frac{a}{B}$ , sont toutes supérieures à  $N$  en vertu de l'inégalité (11) : *les fonctions  $\Omega, \dots$  sont donc majorantes pour*

$$1 - \frac{N}{r} \frac{x - x_0 + y - y_0 + \dots + u - u_0 + v - v_0 + \dots}{r},$$

et, à plus forte raison, *pour les fonctions  $\omega, \dots$*

2° Il est clair que les valeurs initiales des dérivées de tous ordres des fonctions  $\Upsilon$ ,  $\Phi$ , ... coïncident avec les valeurs initiales des dérivées semblables des intégrales dont nous avons constaté l'existence dans le système différentiel total considéré à l'alinéa I. Or dans ce dernier, mis sous forme immédiate, le second membre d'une équation quelconque est évidemment majorant pour

$$\frac{\alpha}{B} \mu \frac{\Theta(\tau)}{1 - \varepsilon \Theta(\tau)},$$

et à plus forte raison pour

$$(12) \quad \frac{\alpha}{B} \mu \Theta[a(x - x_0 + y - y_0 + \dots)],$$

car on voit aisément que la suppression du dénominateur  $1 - \varepsilon \Theta(\tau)$ , puis la diminution des coefficients positifs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$  et  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$ , qui se trouvent remplacés, les premiers par  $\alpha$ , les seconds par 0, ne peuvent que diminuer les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées de tous ordres; d'ailleurs, en vertu de (11) et de  $\alpha > \frac{1}{r}$ , la fonction (12) est à son tour majorante pour

$$(13) \quad N \Theta \left[ \frac{1}{r} (x - x_0 + y - y_0 + \dots) \right].$$

Donc les seconds membres des équations du système différentiel total mis sous forme immédiate sont tous majorants pour la fonction (13) relativement aux valeurs initiales  $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$ . Dès lors, si l'on considère d'une part le système dont il s'agit, d'autre part le système différentiel total évidemment passif qui se déduit du précédent en y remplaçant tous les seconds membres par la fonction (13), il résulte immédiatement de la forme des expressions ultimes (15), (16, 3°) que les dérivées de tous ordres des intégrales déterminées par les conditions initiales  $u = u_0, v = v_0, \dots$  pour  $x = x_0, y = y_0, \dots$  auront dans le premier des valeurs initiales supérieures à celles qu'elles possèdent dans le second. D'après cela, *la valeur initiale d'une dérivée quelconque d'ordre  $m$  de  $\Upsilon, \Phi, \dots$ , surpassera la quantité*

$$N \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1)}{r^{m-1}},$$

et à plus forte raison (comme dans 1°) *le module de la valeur initiale de la dérivée semblable de  $\vartheta, \varphi, \dots$* , qu'on peut considérer comme une dérivée d'ordre  $m-1$  de quelqu'une des dérivées premières.

3° Les relations primitives, intermédiaires et ultimes, se correspondant respectivement dans les deux systèmes  $[i, l], [I, L]$ , on peut, aux relations  $(\varpi)$  du premier système, faire correspondre dans le second un groupe de relations que nous désignerons par  $(\Pi)$ . Or les expressions ultimes fournies par  $(\Pi)$  sont entières par rapport aux fonctions  $\Psi', \dots, \Omega, \dots$  et à leurs dérivées partielles, comme aussi par rapport aux dérivées partielles des fonctions  $\Upsilon, \Phi, \dots$ ; et les expressions ultimes fournies par  $(\varpi)$  sont composées exactement de la même façon avec les fonctions  $\psi, \dots, \omega, \dots$ , leurs dérivées partielles, et les dérivées des fonctions  $\vartheta, \varphi, \dots$ . Donc, en vertu de ce qui précède (1°, 2°), *les intégrales du système  $[I, L]$  dont l'existence a été constatée plus haut (II) admettent pour leurs dérivées principales de tous ordres des valeurs initiales respectivement supérieures aux modules de celles que donnent les formules  $(\varpi)$  et les déterminations initiales  $\vartheta, \varphi, \dots$  pour les dérivées semblables des intégrales fictives dont l'existence est à démontrer.*

4° Les développements des intégrales considérées du système  $[I, L]$  étant de toute nécessité convergents, il résulte immédiatement de ce qui précède (2°, 3°) que les développements construits à l'aide des formules  $(\varpi)$  et des déterminations initiales  $\vartheta, \varphi, \dots$  ne peuvent manquer de l'être aussi.

IV. Tout se réduit maintenant à prouver qu'en supposant régulier le système  $[i, l]$ , les conditions énoncées au début de l'alinéa III peuvent être satisfaites *toutes à la fois* par un choix convenable des constantes (10). A cet effet, nous fixerons arbitrairement les constantes  $\varepsilon, \nu, \dots$  sous les seules conditions exigées par la définition du système  $[I, L]$  (I, II), et nous ferons voir qu'en désignant par  $P, Q$  deux constantes positives absolument quelconques, on peut trouver pour  $\alpha_1, \dots, \alpha_h, \beta_1, \dots, \beta_g$  des valeurs toutes supérieures à  $P$ , et telles que les constantes  $\lambda', \dots$  soient toutes supérieures à  $Q$ .

Nommons  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$  quatre constantes positives, et prenons : 1° pour  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  les produits de  $\gamma$  par des puissances de  $\alpha$  dont les exposants soient respectivement égaux aux rangs de régularité des variables  $x,$

$\gamma, \dots$  dans le système  $[i, l]$  ou  $[I, L]$ ; 2° pour  $\beta_1, \beta_2, \dots$  les produits de  $\eta$  par des puissances de  $\beta$  dont les exposants soient respectivement égaux aux rangs de régularité des fonctions inconnues  $u, v, \dots$ . Désignant enfin par  $n$  la plus petite des constantes  $\nu, \dots$ , assujettissons  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$  à vérifier les inégalités évidemment compatibles

$$(14) \quad \alpha < 1,$$

$$(15) \quad \alpha < \frac{n}{Q},$$

$$(16) \quad \beta > 1,$$

$$(17) \quad \beta > \frac{Q}{n\alpha^h},$$

$$(18) \quad \gamma > \frac{P}{\alpha^n},$$

$$(19) \quad \eta > \frac{P}{\beta}.$$

Cela posé, on voit immédiatement qu'en vertu de (14) et (16), les constantes appartenant respectivement aux deux groupes  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  et  $\beta_1, \dots, \beta_g$  sont au moins égales, les premières à  $\gamma\alpha^h$ , les dernières à  $\eta\beta$ , et que dès lors, en vertu de (18) et (19), elles sont les unes et les autres supérieures à  $P$ .

D'autre part, si l'on désigne par  $t^{(j)}$ , ... les diverses variables de rang  $j$ , par  $t^{(k)}$ , ... les diverses fonctions de rang  $k$  du système  $[I, L]$ , par  $t_0^{(j)}$ , ...,  $s_0^{(k)}$ , ... leurs valeurs initiales, l'une quelconque des équations qui composent ce système est de la forme

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds^{(k)}}{dt^{(j)}} = & \mu \gamma \frac{\beta^{-k}}{\alpha^{-j}} \Theta[\dots + \gamma \alpha^{j''} (t^{(j'')} - t_0^{(j'')}) + \dots + \eta \beta^{k''} (s^{(k'')} - s_0^{(k'')}) + \dots] + \dots \\ & + \nu \frac{\beta^{k'-k}}{\alpha^{j'-j}} \Theta[\dots + \gamma \alpha^{j''} (t^{(j'')} - t_0^{(j'')}) + \dots + \eta \beta^{k''} (s^{(k'')} - s_0^{(k'')}) + \dots] \frac{ds^{(k')}}{dt^{(j')}} \\ & + \dots \end{aligned} \right.$$

et il s'agit de faire voir que la constante  $\nu \frac{\beta^{k'-k}}{\alpha^{j'-j}}$  est nécessairement supérieure à  $Q$ . Observons à cet effet qu'elle ne peut tomber au-dessous de

$$(21) \quad n \frac{\beta^{k'-k}}{\alpha^{j'-j}}.$$

Si  $k' > k$ , la différence  $j' - j$  peut avoir une valeur entière quelconque n'excédant pas l'intervalle de  $-(h-1)$  à  $h-1$ , et, comme les constantes  $\alpha, \beta$  sont la première inférieure, la seconde supérieure à l'unité, l'expression (21) surpassera toujours  $n\beta\alpha^h$ , et à plus forte raison  $Q$  en

vertu de l'inégalité (17). Si  $k' = k$ , on a nécessairement  $j' > j$ , parce que, alors, pour  $s^{(k')}$  comme pour  $s^{(k)}$ , la variable  $t^{(j')}$  est principale et l'autre  $t^{(j')}$  paramétrique relativement au système  $[I, L]$ : la plus petite valeur possible de la même expression sera donc  $\frac{n}{\alpha}$ , quantité encore supérieure à  $Q$  en vertu de l'inégalité (15). Le cas de  $k' < k$  ne peut, d'ailleurs se présenter; car alors, des deux fonctions  $s^{(k')}$ ,  $s^{(k)}$ , la première aurait un rang de régularité inférieur à celui de la seconde, et par suite aucune dérivée de  $s^{(k')}$  ne pourrait figurer dans le second membre de l'équation (20) qui a pour premier membre une dérivée de  $s^{(k)}$ .

30. *La proposition du numéro précédent subsiste pour tout système immédiat et linéaire pouvant se déduire de quelque système partiel, immédiat et régulier, par la suppression de certaines équations différentielles.*

Il est évidemment permis de supposer que le système partiel, immédiat et régulier dont parle l'énoncé, est lui-même linéaire: désignons alors par  $[[i, l]]$  le système proposé, par  $[i, l]$  celui d'où on peut l'extraire, et par  $(\chi)$  l'ensemble des équations qu'il faut adjoindre au premier pour obtenir le second. Le système auxiliaire  $[I, L]$  considéré au numéro précédent (II) se compose évidemment de deux groupes

$$[[I, L]], \quad (X)$$

qui correspondent respectivement aux groupes

$$[[i, l]], \quad (\chi)$$

dont se compose  $[i, l]$ . Si l'on fixe arbitrairement les constantes  $\epsilon$ ,  $\nu$ , ... sous les seules conditions exigées par la définition du système  $[I, L]$ , il résulte de ce que nous venons de voir (29, IV) que,  $P$ ,  $Q$  désignant deux constantes positives absolument quelconques, on peut trouver au-dessus de  $P$  des valeurs de  $\alpha_1, \dots, \alpha_h, \beta_1, \dots, \beta_g$  rendant supérieures à  $Q$  les diverses constantes  $\lambda', \dots$  du système  $[I, L]$ , et par suite celles du groupe  $[[I, L]]$ . Il suffit maintenant, pour achever la démonstration, de se reporter à la proposition énoncée dans l'alinéa III du numéro précédent.

31. *La proposition du n° 29 ne cesse pas d'être vraie lorsque le système*

*différentiel considéré est total, ou qu'il peut se déduire de quelque système total par la suppression de certaines équations.*

Nous supposerons, comme toujours, que le groupe simple de formules à l'aide duquel on construit les développements est entièrement composé de relations ultimes. Nous nommerons

$x_0, y_0, \dots$  les valeurs initiales des  $h$  variables indépendantes  $x, y, \dots$ ;

$u_0, v_0, \dots$  celles des  $g$  fonctions inconnues  $u, v, \dots$ ;

$\omega, \varphi, \dots$  les déterminations initiales de ces dernières;

$\omega(x, y, \dots, u, v, \dots), \dots$  les seconds membres des équations proposées;

$r$  une première constante positive inférieure à tous les modules des fonctions  $\omega, \dots, \omega, \varphi, \dots$  pour les valeurs initiales de leurs variables respectives;

$\mu$  une deuxième supérieure à tous les modules que les fonctions  $\omega, \dots$  et les dérivées premières de  $\omega, \varphi, \dots$  peuvent acquérir à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon  $r$  ayant pour centres ces valeurs initiales.

Nous poserons enfin

$$\Lambda(x, y, \dots, u, v, \dots) = \frac{x - x_0 + y - y_0 + \dots + u - u_0 + v - v_0 + \dots}{r}^\mu,$$

et nous considérerons le système total obtenu en égalant à  $\Lambda(x, y, \dots, u, v, \dots)$  les  $gh$  dérivées

$$\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \dots,$$

$$\frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}, \dots,$$

$$\dots, \dots, \dots$$

Ce système passif possède un groupe d'intégrales ordinaires olo- tropes en  $x_0, y_0, \dots$ , s'y réduisant respectivement à  $u_0, v_0, \dots$ , et possédant des dérivées de tous ordres dont les valeurs initiales sont essentiellement réelles, positives et indépendantes des valeurs particulières choisies pour  $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$ ; les intégrales en question

vérifient donc aussi le système, extrait du précédent, dont les diverses équations ont respectivement les mêmes premiers membres que celles du proposé. En appelant  $Y, \Phi, \dots$  les déterminations initiales de ces intégrales relativement au nouveau système ainsi obtenu, on verra sans peine : 1° que la fonction  $A$  est majorante pour toutes les fonctions  $\omega, \dots$ ; 2° que la valeur initiale d'une dérivée quelconque de  $Y, \Phi, \dots$  surpasse le module de la valeur initiale de la dérivée semblable de  $\varphi, \zeta, \dots$ . Après quoi, la comparaison des formules ultimes correspondantes dans le système proposé et dans celui qu'on vient de former prouvera immédiatement l'existence des intégrales fictives.

32. Au sujet des propositions qui font l'objet du numéro précédent et de l'alinéa III du n° 29, on pourrait faire des remarques analogues à celles du n° 32\*. Nous les supprimons à cause de la longueur de leurs énoncés, mais le lecteur y suppléerait facilement au besoin.

33. Les propositions successivement démontrées aux n°s 29, 30 et 31 peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

*Tout système différentiel jouissant de la triple propriété d'être immédiat, régulier ou semi-régulier, et linéaire, possède un groupe d'intégrales fictives répondant à des conditions initiales données, et construites à l'aide d'un groupe simple donné de relations primitives, intermédiaires ou ultimes.*

D'après cela, un semblable système possède un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales choisies de manière à assurer la concordance numérique des relations primitivo-ultimes. Car, ainsi que nous l'avons vu au n° 20, tout se réduit alors à démontrer la convergence des développements des intégrales hypothétiques, qui se trouve assurée par la proposition précédente.

34. *Tout système immédiat, régulier et non linéaire, possède un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales choisies de manière à assurer la concordance numérique des relations primitivo-ultimes.*

Sauf aux alinéas III et VI, nous supposerons simplement que le système différentiel considéré est *immédiat et non linéaire*, sans nous inquiéter de savoir s'il est régulier ou non.



I. D'un système immédiat et non linéaire quelconque, nous déduisons d'abord un système linéaire par le procédé suivant :

1°  $g$  désignant toujours le nombre des fonctions inconnues et  $h$  celui des variables indépendantes, adjoignons aux fonctions inconnues du système donné de nouvelles fonctions inconnues en nombre égal à celui des diverses dérivées paramétriques; écrivons dans les cases vides du Tableau de nouvelles équations différentielles exprimant l'égalité entre les nouvelles fonctions inconnues et les dérivées paramétriques des anciennes; remplaçons enfin dans toutes les équations proposées les diverses dérivées paramétriques par les nouvelles fonctions inconnues qui leur correspondent : nous obtiendrons ainsi un groupe (E) composé de  $gh$  équations.

Par exemple, si le Tableau du système immédiat proposé contient la colonne

$$(22) \quad \begin{array}{c} (x) \\ (y) \\ (z) \\ (s) \\ (t) \end{array} \left\{ \begin{array}{c} (u) \\ \\ \frac{du}{dz} = \dots \\ \frac{du}{ds} = \dots \\ \end{array} \right.$$

les équations qu'il faudra écrire dans les cases vides de la colonne en question seront

$$(23) \quad \frac{du}{dx} = u'_x, \quad \frac{du}{dy} = u'_y, \quad \frac{du}{dt} = u'_t,$$

où  $u'_x, u'_y, u'_t$  désignent de nouvelles fonctions inconnues.

2° Dans le système (E) évidemment immédiat (puisque les seconds membres ne contiennent plus aucune dérivée), toutes les variables

sont devenues principales par rapport à chacune des anciennes fonctions inconnues, et l'on peut, pour chacune de ces dernières, diviser en trois groupes les dérivées complexes du second ordre : les unes sont prises par rapport à deux anciennes variables principales de la fonction considérée, les autres par rapport à une ancienne et une nouvelle, les autres enfin par rapport à deux nouvelles, et à chacune de ces dérivées correspond, comme on sait, une condition de passivité (22). Parmi ces diverses conditions, nous prendrons seulement celles qui correspondent aux dérivées de la seconde et de la troisième espèce, et nous les considérerons comme de nouvelles équations différentielles que nous adjoindrons aux précédentes. En prenant le même exemple que ci-dessus (1°), et désignant par  $\left[ \frac{d^2 u}{dx dy} \right]$ , . . les conditions de passivité qui correspondent respectivement aux dérivées complexes  $\frac{d^2 u}{dx dy}$ , . . ., la fonction  $u$  nous fournira ainsi deux groupes de nouvelles équations différentielles. L'un d'eux contiendra les équations

$$(24) \quad \left[ \frac{d^2 u}{dx dz} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dx ds} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dy dz} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dy ds} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dt dz} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dt ds} \right],$$

ayant respectivement pour premiers membres

$$\frac{du'_x}{dz}, \quad \frac{du'_x}{ds}, \quad \frac{du'_y}{dz}, \quad \frac{du'_y}{ds}, \quad \frac{du'_t}{dz}, \quad \frac{du'_t}{ds},$$

et l'autre contiendra les équations

$$\left[ \frac{d^2 u}{dy dt} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dx dt} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dx dy} \right],$$

qui devront être écrites de la manière suivante : considérant les équations ajoutées à la colonne ( $u$ ) dans l'ordre relatif (23) où elles se trouvent quand on parcourt cette colonne de haut en bas, on formera les conditions de passivité dont il s'agit en comparant d'abord la dernière de ces trois équations aux deux précédentes, puis l'avant-dernière à la précédente, et en ayant soin de choisir pour premiers membres les dérivées de  $u'_t$  dans le premier cas, celles de  $u_y$  dans le

second; on obtiendra ainsi

$$(25) \quad \frac{du'_t}{dx} = \frac{du'_x}{dt}, \quad \frac{du'_t}{dy} = \frac{du'_y}{dt}, \quad \frac{du'_y}{dx} = \frac{du'_x}{dy}.$$

3° Cette suite d'opérations, répétée en considérant successivement toutes les anciennes fonctions inconnues, fournira deux groupes (F), (K) de nouvelles équations différentielles, composés, le premier d'équations analogues à (24), et le second d'équations analogues à (25). En désignant par (G) ce que deviennent les équations (F) lorsqu'on en élimine, au moyen des équations (K), les dérivées figurant dans les premiers membres de celles-ci, on obtient en définitive un système différentiel composé des trois groupes

$$(26) \quad (E), (G), (K).$$

II. *Étant donné un système immédiat non linéaire, le système (26) qu'on en déduit à l'aide du procédé ci-dessus indiqué (1) est immédiat et linéaire.*

Si le système dont il s'agit est immédiat, il est évidemment linéaire (27).

Pour démontrer qu'il est immédiat, écrivons ses diverses équations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire d'après les dérivées qui figurent respectivement dans leurs premiers membres. Il est bien facile de voir comment les cases pleines et vides se trouvent alors disposées dans les colonnes qui correspondent aux nouvelles fonctions inconnues : si le Tableau du système proposé contient par exemple la colonne (22), nous aurons comme cases vides dans la colonne ( $u'_t$ ) celle qui correspond à la ligne ( $t$ ), dans la colonne ( $u'_y$ ) celles qui correspondent aux lignes ( $y$ ) et ( $t$ ), dans la colonne ( $u'_x$ ) celles qui correspondent aux lignes ( $x$ ), ( $y$ ) et ( $t$ ). Et en rangeant ces trois colonnes dans l'ordre suivant :

(27)

|       | $(u'_t)$                              | $(u'_y)$                              | $(u'_x)$                   |
|-------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| $(x)$ | $\frac{du'_t}{dx} = \frac{du'_x}{dt}$ | $\frac{du'_y}{dx} = \frac{du'_x}{dy}$ |                            |
| $(y)$ | $\frac{du'_t}{dy} = \frac{du'_y}{dt}$ |                                       |                            |
| $(z)$ | $\frac{du'_t}{dz} = \dots$            | $\frac{du'_y}{dz} = \dots$            | $\frac{du'_x}{dz} = \dots$ |
| $(s)$ | $\frac{du'_t}{ds} = \dots$            | $\frac{du'_y}{ds} = \dots$            | $\frac{du'_x}{ds} = \dots$ |
| $(t)$ |                                       |                                       |                            |

il est clair que, dans une ligne horizontale quelconque du Tableau partiel ainsi obtenu, toute case située à droite d'une case vide est également vide. Supposons maintenant que, dans le système immédiat proposé, toutes les variables paramétriques de la fonction  $u$  le soient aussi pour une autre fonction  $v$ , et que le Tableau de ce système contienne par exemple les deux colonnes

(28)

|       | $(u)$                   | $(v)$                   |
|-------|-------------------------|-------------------------|
| $(x)$ |                         |                         |
| $(y)$ |                         |                         |
| $(z)$ | $\frac{du}{dz} = \dots$ | $\frac{dv}{dz} = \dots$ |
| $(s)$ | $\frac{du}{ds} = \dots$ |                         |
| $(t)$ |                         |                         |

Alors les trois Tableaux partiels

|       | $(u'_t)$                              | $(v'_t)$                              | $(v'_s)$                              | $(v'_y)$                              | $(v'_x)$                   |
|-------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| $(x)$ | $\frac{du'_t}{dx} = \frac{du'_x}{dt}$ | $\frac{dv'_t}{dx} = \frac{dv'_x}{dt}$ | $\frac{dv'_s}{dx} = \frac{dv'_x}{ds}$ | $\frac{dv'_y}{dx} = \frac{dv'_x}{dy}$ |                            |
| $(y)$ | $\frac{du'_t}{dy} = \frac{du'_y}{dt}$ | $\frac{dv'_t}{dy} = \frac{dv'_y}{dt}$ | $\frac{dv'_s}{dy} = \frac{dv'_y}{ds}$ |                                       |                            |
| $(z)$ | $\frac{du'_t}{dz} = \dots$            | $\frac{dv'_t}{dz} = \dots$            | $\frac{dv'_s}{dz} = \dots$            | $\frac{dv'_y}{dz} = \dots$            | $\frac{dv'_x}{dz} = \dots$ |
| $(s)$ | $\frac{du'_t}{ds} = \dots$            | $\frac{dv'_t}{ds} = \frac{dv'_s}{dt}$ |                                       |                                       |                            |
| $(t)$ |                                       |                                       |                                       |                                       |                            |

(29)

|       | $(u'_y)$                              | $(v'_y)$                              | $(v'_x)$                   |       | $(u'_x)$                   | $(v'_x)$                   |
|-------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|-------|----------------------------|----------------------------|
| $(x)$ | $\frac{du'_y}{dx} = \frac{du'_x}{dy}$ | $\frac{dv'_y}{dx} = \frac{dv'_x}{dy}$ |                            | $(x)$ |                            |                            |
| $(y)$ |                                       |                                       |                            | $(y)$ |                            |                            |
| $(z)$ | $\frac{du'_y}{dz} = \dots$            | $\frac{dv'_y}{dz} = \dots$            | $\frac{dv'_x}{dz} = \dots$ | $(z)$ | $\frac{du'_x}{dz} = \dots$ | $\frac{dv'_x}{dz} = \dots$ |
| $(s)$ | $\frac{du'_y}{ds} = \dots$            |                                       |                            | $(s)$ | $\frac{du'_x}{ds} = \dots$ |                            |
| $(t)$ |                                       |                                       |                            | $(t)$ |                            |                            |

dont les colonnes se trouvent associées et rangées suivant une loi facile à apercevoir, jouissent de la même propriété que le Tableau (27).

Cela posé, je dis que le système auxiliaire (26) est immédiat.

Si l'on considère, en effet, le Tableau total, dans les cas duquel nous avons supposé écrites les diverses équations de ce système, les colonnes qui correspondent aux anciennes fonctions inconnues sont entièrement pleines et ne contiennent dans leurs seconds membres au-

cune dérivée, quelle qu'elle soit; les colonnes qui correspondent aux nouvelles ne contiennent dans leurs seconds membres aucune dérivée des anciennes. Examinons alors quelles dérivées des nouvelles fonctions inconnues figurent dans ces derniers seconds membres.

Soient  $u$  une fonction inconnue quelconque du système proposé, et (22) la colonne correspondante : puisque le système proposé est immédiat, les seconds membres des équations de cette colonne pourront contenir les dérivées  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{du}{dt}$ , et nulle autre dérivée de  $u$ . Dès lors, les équations des groupes

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{d^2 u}{dt dz} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dt ds} \right]; \\ \left[ \frac{d^2 u}{dy dz} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dy ds} \right]; \\ \left[ \frac{d^2 u}{dx dz} \right], \quad \left[ \frac{d^2 u}{dx ds} \right] \end{array} \right.$$

pourront contenir dans leurs seconds membres les dérivées des groupes respectifs

$$\begin{array}{l} \frac{du'_x}{dt}, \quad \frac{du'_y}{dt}, \quad \frac{du'_t}{dt}; \\ \frac{du'_x}{dy}, \quad \frac{du'_y}{dy}, \quad \frac{du'_t}{dy}; \\ \frac{du'_x}{dx}, \quad \frac{du'_y}{dx}, \quad \frac{du'_t}{dx}, \end{array}$$

et nulle autre dérivée des fonctions

$$(31) \quad u'_x, \quad u'_y, \quad u'_t.$$

Finalement, si, dans les équations (30), on tient compte des équations (25) et qu'on leur adjoigne ces dernières, les colonnes  $(u'_t)$ ,  $(u'_y)$ ,  $(u'_x)$  ne pourront contenir dans leurs seconds membres, comme dérivées des fonctions (31), que celles des groupes respectifs

$$\begin{array}{l} \frac{du'_x}{dt}, \quad \frac{du'_y}{dt}, \quad \frac{du'_t}{dt}; \\ \frac{du'_x}{dy}, \quad \frac{du'_y}{dy}, \quad \frac{du'_y}{dt}; \\ \frac{du'_x}{dx}, \quad \frac{du'_x}{dy}, \quad \frac{du'_x}{dt}. \end{array}$$

En jetant alors les yeux sur le Tableau partiel (27), on se convaincra que les conditions requises pour le caractère immédiat du système auxiliaire se trouvent de ce côté satisfaites.

Soient maintenant  $u$  et  $v$  deux fonctions inconnues quelconques du système proposé. Si quelque variable principale de  $v$  y est paramétrique pour  $u$ , les seconds membres des équations de la colonne ( $u$ ) dans le Tableau correspondant ne contiendront aucune dérivée de  $v$ ; par suite, dans le Tableau du système auxiliaire, les seconds membres des équations des diverses colonnes ( $u'$ ) ne contiendront aucune dérivée des diverses fonctions  $v'$ . Supposons, au contraire, que toutes les variables paramétriques de  $u$  le soient pour  $v$  dans le système proposé, et que les deux colonnes correspondantes soient, par exemple, celles du Tableau partiel (28). Les seconds membres de la colonne ( $u$ ) pouvant contenir les dérivées  $\frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ ,  $\frac{dv}{ds}$ ,  $\frac{dv}{dt}$ , et nulle autre dérivée de  $v$ , les équations des groupes (30) pourront contenir dans leurs seconds membres les dérivées des groupes respectifs

$$\begin{aligned} \frac{dv'_x}{dt}, \quad \frac{dv'_y}{dt}, \quad \frac{dv'_s}{dt}, \quad \frac{dv'_t}{dt}; \\ \frac{dv'_x}{dy}, \quad \frac{dv'_y}{dy}, \quad \frac{dv'_s}{dy}, \quad \frac{dv'_t}{dy}; \\ \frac{dv'_x}{dx}, \quad \frac{dv'_y}{dx}, \quad \frac{dv'_s}{dx}, \quad \frac{dv'_t}{dx}, \end{aligned}$$

et nulle autre dérivée des fonctions

$$(32) \quad v'_x, \quad v'_y, \quad v'_s, \quad v'_t.$$

Finalement, si, dans les équations (30), on tient compte des équations

$$\begin{aligned} \frac{dv'_t}{ds} &= \frac{dv'_s}{dt}, & \frac{dv'_t}{dy} &= \frac{dv'_y}{dt}, & \frac{dv'_t}{dx} &= \frac{dv'_x}{dt}, \\ \frac{dv'_s}{dy} &= \frac{dv'_y}{ds}, & \frac{dv'_s}{dx} &= \frac{dv'_x}{ds}, & \frac{dv'_y}{dx} &= \frac{dv'_x}{dy}, \end{aligned}$$

et qu'on leur adjoigne ces dernières, les colonnes ( $u'_t$ ), ( $u'_y$ ), ( $u'_x$ ) ne pourront contenir dans leurs seconds membres, comme dérivées des

fonctions (32), que celles des groupes respectifs

$$\begin{array}{cccc} \frac{dv'_x}{dt}, & \frac{dv'_y}{dt}, & \frac{dv'_z}{dt}, & \frac{dv'_t}{dt}; \\ \frac{dv'_x}{dy}, & \frac{dv'_y}{dy}, & \frac{dv'_y}{ds}, & \frac{dv'_y}{dt}; \\ \frac{dv'_x}{dx}, & \frac{dv'_x}{dy}, & \frac{dv'_x}{ds}, & \frac{dv'_x}{dt}. \end{array}$$

En jetant alors les yeux sur les trois Tableaux partiels (29), on se convaincra que les conditions requises pour le caractère immédiat du système auxiliaire se trouvent encore satisfaites de ce côté, ce qui achève la démonstration du point visé par le présent alinéa.

III. *Le système auxiliaire (26) est régulier en même temps que le proposé.*

Si, pour fixer les idées, on considère le système régulier (non linéaire)

|     | (u)                     | (v)                     | (w)                     | (p) |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----|
| (x) | $\frac{du}{dx} = \dots$ | $\frac{dv}{dx} = \dots$ | $\frac{dw}{dx} = \dots$ |     |
| (y) | $\frac{du}{dy} = \dots$ | $\frac{dv}{dy} = \dots$ | $\frac{dw}{dy} = \dots$ |     |
| (z) | $\frac{du}{dz} = \dots$ |                         |                         |     |
| (s) |                         |                         |                         |     |

il suffira, pour se convaincre que le système auxiliaire est également régulier, de ranger les colonnes de son Tableau dans l'ordre suivant :

$$\begin{array}{cccc} (u), & (v), & (w), & (p); & (u'_s), & (v'_s), & (w'_s), & (p'_s); \\ & & & & (v'_z), & (w'_z), & (p'_z); & (p'_y); & (p'_x). \end{array}$$

Les lignes étant rangées, comme ci-dessus, dans l'ordre (x), (y),



$(z)$ ,  $(s)$ , chaque colonne parcourue de haut en bas se composera alors d'une file de cases pleines suivie d'une file de cases vides, et dans les divers groupes de colonnes indiqués ci-dessus les nombres de cases pleines seront respectivement

$$4; \quad 3; \quad 2; \quad 1; \quad 0.$$

Si l'on considère au contraire le système irrégulier

|     | (u)                     | (v)                     |
|-----|-------------------------|-------------------------|
| (x) | $\frac{du}{dx} = \dots$ |                         |
| (y) |                         | $\frac{dv}{dy} = \dots$ |
| (z) |                         |                         |

les colonnes  $(u')$ ,  $(v')$  offriront dans le Tableau du système auxiliaire les mêmes dispositions respectives de cases pleines et vides que les colonnes  $(u)$ ,  $(v)$  du Tableau ci-dessus; le système auxiliaire sera donc, comme le proposé, nécessairement irrégulier.

IV. Considérons, pour fixer les idées, le système immédiat (non linéaire)

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{du}{dx} = U_x \left( x, y, z, u, v, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz} \right), \\ \frac{du}{dy} = U_y \left( x, y, z, u, v, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz} \right), \\ \frac{dv}{dx} = V_x \left( x, y, z, u, v, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz} \right), \end{cases}$$

dont les équations doivent être disposées comme ci-après :

$$(34) \quad \begin{array}{c} (u) \qquad (v) \\ \left( \begin{array}{l} (x) \\ (y) \\ (z) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \frac{du}{dx} = \dots & \frac{dv}{dx} = \dots \\ \hline \frac{du}{dy} = \dots & \\ \hline & \end{array} \right) \end{array}$$

Le système auxiliaire défini à l'alinéa I est alors

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = U_x(x, y, z, u, v, u'_z, v'_y, v'_z), \\ \frac{du}{dy} = U_y(x, y, z, u, v, u'_z, v'_y, v'_z), \\ \frac{dv}{dx} = V_x(x, y, z, u, v, v'_y, v'_z); \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dz} = u'_z, \\ \frac{dv}{dy} = v'_y, \\ \frac{dv}{dz} = v'_z; \end{array} \right.$$

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du'_z}{dx} = \frac{dU_x}{dz} + \frac{dU_x}{du} u'_z + \frac{dU_x}{dv} v'_z + \frac{dU_x}{du'_z} \frac{du'_z}{dz} + \frac{dU_x}{dv'_y} \frac{dv'_y}{dz} + \frac{dU_x}{dv'_z} \frac{dv'_z}{dz}, \\ \frac{du'_z}{dy} = \frac{dU_y}{dz} + \frac{dU_y}{du} u'_z + \frac{dU_y}{dv} v'_z + \frac{dU_y}{du'_z} \frac{du'_z}{dz} + \frac{dU_y}{dv'_y} \frac{dv'_y}{dz} + \frac{dU_y}{dv'_z} \frac{dv'_z}{dz}, \\ \frac{dv'_y}{dx} = \frac{dV_x}{dy} + \frac{dV_x}{du} U_y + \frac{dV_x}{dv} v'_y + \frac{dV_x}{dv'_y} \frac{dv'_y}{dy} + \frac{dV_x}{dv'_z} \frac{dv'_z}{dz}, \\ \frac{dv'_z}{dx} = \frac{dV_x}{dz} + \frac{dV_x}{du} u'_z + \frac{dV_x}{dv} v'_z + \frac{dV_x}{dv'_y} \frac{dv'_y}{dz} + \frac{dV_x}{dv'_z} \frac{dv'_z}{dz}; \end{array} \right.$$

$$(38) \quad \frac{dv'_z}{dy} = \frac{dv'_y}{dz},$$

et ses équations doivent être disposées de la manière suivante :

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} (x) \\ (y) \\ (z) \end{array} \right. \begin{array}{ccccc} (u) & (v) & (u'_z) & (v'_z) & (v'_y) \\ \hline \frac{du}{dx} = \dots & \frac{dv}{dx} = \dots & \frac{du'_z}{dx} = \dots & \frac{dv'_z}{dx} = \dots & \frac{dv'_y}{dx} = \dots \\ \hline \frac{du}{dy} = \dots & \frac{dv}{dy} = v'_y & \frac{du'_z}{dy} = \dots & \frac{dv'_z}{dy} = \frac{dv'_y}{dz} & \\ \hline \frac{du}{dz} = u'_z & \frac{dv}{dz} = v'_z & & & \end{array}.$$

Cela posé, si le système immédiat (34) possède un groupe d'intégrales ordinaires

$$u = U(x, y, z), \quad v = V(x, y, z)$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u = u(z) & \text{pour } x = x_0, y = y_0, \\ v = \varphi(y, z) & \text{pour } x = x_0, \end{array} \right.$$

le système auxiliaire (39) possède le groupe d'intégrales ordinaires

$$(41) \quad u = U(x, y, z), \quad v = V(x, y, z), \quad u'_z = \frac{dU}{dz}, \quad v'_y = \frac{dV}{dy}, \quad v'_z = \frac{dV}{dz},$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u(z_0) \\ v = \varphi(y_0, z_0) \end{array} \right\} \text{ pour } x = x_0, y = y_0, z = z_0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_z = u'(z) \\ v'_z = \varphi'_z(y_0, z) \end{array} \right\} \text{ pour } x = x_0, y = y_0;$$

$$v'_y = \varphi'_y(y, z) \text{ pour } x = x_0.$$

Il est d'abord évident que les fonctions (41) sont des intégrales ordinaires du système (39). D'autre part, en considérant les fonctions U, V pour des valeurs de  $x, y, z$  suffisamment voisines de  $x_0, y_0, z_0$ , groupant d'une manière convenable les termes de leurs développements, et tenant compte des conditions initiales (40), on a les iden-

tités

$$\begin{aligned} U &= u(z) + (x - x_0)A + (y - y_0)B, \\ V &= \varphi(y, z) + (x - x_0)C, \end{aligned}$$

où A, B, C désignent certaines fonctions de  $x, y, z$  olotropes en  $x_0, y_0, z_0$ . On en déduit par la différentiation les identités

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= \frac{du}{dz} + (x - x_0) \frac{dA}{dz} + (y - y_0) \frac{dB}{dz}, \\ \frac{dV}{dy} &= \frac{d\varphi}{dy} + (x - x_0) \frac{dC}{dy}, \\ \frac{dV}{dz} &= \frac{d\varphi}{dz} + (x - x_0) \frac{dC}{dz}, \end{aligned}$$

qui, jointes aux précédentes, donnent bien pour les intégrales (41) les conditions initiales (42)

*Réciproquement, si le système (39) possède un groupe d'intégrales ordinaires satisfaisant aux conditions initiales (42), les valeurs de  $u, v$  qui  $\varphi$  figurent forment un groupe d'intégrales ordinaires du système (34) satisfaisant aux conditions initiales (40).*

En effet, il résulte immédiatement de la nature même du système (39) que tout groupe d'intégrales ordinaires y est de la forme (41), et que les valeurs de  $u, v$  figurant dans le groupe sont des intégrales ordinaires du système (34).

Maintenant, les trois dernières des conditions initiales (42) fournissent les identités

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dz} = \frac{du}{dz} + (x - x_0)A + (y - y_0)B, \\ \frac{dV}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} + (x - x_0)C, \\ \frac{dV}{dz} = \left[ \frac{d\varphi}{dz} \right]_{y=y_0} + (x - x_0)D + (y - y_0)H, \end{cases}$$

où A, B, C, D, H désignent certaines fonctions de  $x, y, z$  olotropes en  $x_0, y_0, z_0$ . On peut poser, d'autre part,

$$(44) \quad \begin{cases} U = u_1(z) + (x - x_0)P + (y - y_0)Q, \\ V = \varphi_1(y, z) + (x - x_0)R, \end{cases}$$

où  $u$ ,  $\varphi$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  désignent de nouvelles fonctions olotropes pour les valeurs initiales des variables, et l'on en déduit par la différentiation les identités

$$(45) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dz} = \frac{du_1}{dz} + (x - x_0) \frac{dP}{dz} + (y - y_0) \frac{dQ}{dz}, \\ \frac{dV}{dy} = \frac{d\varphi_1}{dy} + (x - x_0) \frac{dR}{dy}, \\ \frac{dV}{dz} = \frac{d\varphi_1}{dz} + (x - x_0) \frac{dR}{dz}. \end{cases}$$

La comparaison des relations (43) et (45) fait voir que leurs seconds membres sont respectivement égaux, quels que soient  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; on en déduit que les relations

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{du}{dz}, \quad \frac{d\varphi_1}{dy} = \frac{d\varphi}{dy}, \quad \left[ \frac{d\varphi_1}{dz} \right]_{y=y_0} = \left[ \frac{d\varphi}{dz} \right]_{y=y_0}$$

sont vérifiées, la première et la troisième quel que soit  $z$ , la deuxième quels que soient  $y$  et  $z$ . La première de ces identités montre que la différence

$$(46) \quad u_1(z) - u(z)$$

est indépendante de  $z$ ; la deuxième et la troisième montrent successivement que la différence

$$(47) \quad \varphi_1(y, z) - \varphi(y, z)$$

est indépendante de  $y$ , puis de  $z$  (8\*). Les différences (46), (47) se réduisent donc respectivement à des constantes. Si l'on attribue alors à  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dans les formules (44), les valeurs particulières  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , et que l'on tienne compte des deux premières conditions initiales (42), on voit immédiatement que les constantes dont il s'agit sont nulles. Les différences (46), (47) sont donc l'une et l'autre identiquement nulles, ce qu'il suffisait de prouver.

V. *Si la concordance numérique des relations primitivo-ultimes (ou primitives) a lieu dans le système immédiat (34) relativement aux conditions initiales (40), elle a lieu dans le système auxiliaire (39) relativement aux conditions initiales (42), et réciproquement.*

Pour abrégé le langage, quand nous aurons à considérer les nouvelles fonctions inconnues

$$u'_x, \quad v'_y, \quad v'_z,$$

et leurs dérivées principales ou paramétriques de tous ordres

$$\frac{d^n u'_x}{dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma}, \quad \frac{d^n v'_y}{dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma}, \quad \frac{d^n v'_z}{dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma},$$

nous appellerons souvent *dérivées correspondantes* de  $u, v$  les dérivées

$$\frac{du}{dz}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dv}{dz};$$

$$\frac{d^{n+1} u}{dx^\alpha dy^\beta dz^{\gamma+1}}, \quad \frac{d^{n+1} v}{dx^\alpha dy^{\beta+1} dz^\gamma}, \quad \frac{d^{n+1} v}{dx^\alpha dy^\beta dz^{\gamma+1}}.$$

(Il faut bien se garder de confondre entre elles les deux locutions *dérivées correspondantes* et *dérivées semblables*.)

(a) Occupons-nous d'abord de la proposition directe.

Comme dans un système immédiat quelconque le groupe des formules ( $\Gamma$ ) équivaut entièrement à celui des formules primitives (16. 5°), nous sommes ramenés à supposer que les relations du groupe ( $\Delta$ ), obtenu par la réunion des deux précédents, s'accordent dans le système proposé (34) relativement aux conditions initiales (40), et nous prouverons que les formules primitives du système auxiliaire (39), combinées avec les conditions initiales (42), ne peuvent alors fournir :

1° Pour les fonctions  $u, v$  et leurs diverses dérivées, aucune valeur initiale si ce n'est celles qu'on obtient pour les mêmes quantités à l'aide des formules ( $\Delta$ ) du système (34), combinées avec les conditions initiales (40);

2° Pour les fonctions  $u'_x, v'_y, v'_z$  et leurs diverses dérivées, aucune valeur initiale si ce n'est celles qu'on obtient de la même façon pour les dérivées correspondantes de  $u, v$ .

Tout d'abord, et par la nature même des conditions initiales imposées tant aux intégrales du système (34) qu'à celles du système (39), les fonctions  $u, v$  ont de part et d'autre la même valeur initiale, et les fonctions  $u'_x, v'_y, v'_z$  ont respectivement pour valeurs initiales dans le système (39) celles que possèdent dans le système (34) les dérivées  $\frac{du}{dz}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$ .

En outre, ainsi que nous allons le constater, les dérivées de  $u'_z$  relatives à la seule variable  $z$ , les dérivées de  $v'_y$  relatives aux seules variables  $y$  et  $z$ , et les dérivées semblables de  $v'_z$  ont respectivement pour valeurs initiales dans le système (39) celles que possèdent dans le système (34) les dérivées (paramétriques) correspondantes de  $u$ ,  $v$ . Effectivement, les dérivées considérées de  $u'_z$ ,  $v'_y$ ,  $v'_z$  peuvent être soit paramétriques, soit principales : pour les premières, il suffit encore de comparer les conditions initiales; pour les dernières, les expressions primitives sont toutes fournies par la relation (38) et par celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations convenables, et notre remarque, évidente lorsqu'il s'agit du genre 1, se vérifie de proche en proche, en passant d'un genre au suivant dans un ordre quelconque.

Si l'on considère maintenant les dérivées de  $u$  relatives à la seule variable  $z$  et les dérivées de  $v$  relatives aux seules variables  $y$  et  $z$ , les valeurs initiales que leur assignent les formules primitives dans le système (39) sont précisément les mêmes que ces dérivées possèdent dans le proposé en vertu des conditions initiales (40) : c'est là une conséquence immédiate de la remarque qui précède, si l'on observe que les expressions primitives des dérivées dont il s'agit sont toutes fournies par les relations (36) et celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations convenables.

Il nous reste à considérer les dérivées de  $u$ ,  $u'_z$  qui contiennent  $dx$  ou  $dy$  au dénominateur de leur notation, et les dérivées de  $v$ ,  $v'_y$ ,  $v'_z$  qui contiennent  $dx$  de la même manière. Or la comparaison de la formule (35) aux formules (33), puis des formules (37) aux formules

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx dz} &= \frac{dU_x}{dz} + \frac{dU_x}{du} \frac{du}{dz} + \frac{dU_x}{dv} \frac{dv}{dz} + \frac{dU_x}{d\left(\frac{du}{dz}\right)} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{dU_x}{d\left(\frac{dv}{dy}\right)} \frac{d^2 v}{dy dz} + \frac{dU_x}{d\left(\frac{dv}{dz}\right)} \frac{d^2 v}{dz^2}, \\ \frac{d^2 u}{dy dz} &= \frac{dU_y}{dz} + \frac{dU_y}{du} \frac{du}{dz} + \frac{dU_y}{dv} \frac{dv}{dz} + \frac{dU_y}{d\left(\frac{du}{dz}\right)} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{dU_y}{d\left(\frac{dv}{dy}\right)} \frac{d^2 v}{dy dz} + \frac{dU_y}{d\left(\frac{dv}{dz}\right)} \frac{d^2 v}{dz^2}, \\ \frac{d^2 v}{dx dy} &= \frac{dV_x}{dy} + \frac{dV_x}{du} U_y + \frac{dV_x}{dv} \frac{dv}{dy} + \frac{dV_x}{d\left(\frac{dv}{dy}\right)} \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{dV_x}{d\left(\frac{dv}{dz}\right)} \frac{d^2 v}{dy dz}, \\ \frac{d^2 v}{dx dz} &= \frac{dV_x}{dz} + \frac{dV_x}{du} \frac{du}{dz} + \frac{dV_x}{dv} \frac{dv}{dz} + \frac{dV_x}{d\left(\frac{dv}{dy}\right)} \frac{d^2 v}{dy dz} + \frac{dV_x}{d\left(\frac{dv}{dz}\right)} \frac{d^2 v}{dz^2}, \end{aligned} \right.$$

que donnent les relations ( $\Delta$ ) du système proposé, et le premier point se trouve ainsi entièrement démontré en ce qui concerne les dérivées de l'ordre  $k + 1$ .

Achevons de même la démonstration du second point. Pour les dérivées de  $u$ , qui contiennent  $dx$  ou  $dy$  au dénominateur de leur notation, et pour les dérivées de  $v$ ,  $v'_2$  qui contiennent  $dx$  de la même manière, les expressions primitives sont fournies soit par les formules (37) et celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations quelconques, soit par la formule (38) et celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations convenables. Nous désignerons respectivement par ( $\Psi'$ ) et ( $X'$ ) ces deux groupes de relations, et nous nommerons ( $\Psi''$ ) le groupe obtenu en adjoignant aux formules (48) toutes celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations quelconques. Le groupe ( $\Psi''$ ) est entièrement contenu dans le groupe ( $\Delta$ ) du système proposé, et, pour passer des formules ( $\Psi'$ ) aux formules ( $\Psi''$ ), il suffit évidemment de remplacer  $u_z$ ,  $v_z$ ,  $v'_2$  et leurs dérivées de tous ordres par les dérivées correspondantes de  $u$ ,  $v$ . En outre, si, parmi les formules ( $\Psi''$ ) et ( $X'$ ), on considère celles dont les premiers membres sont des dérivées d'ordre  $k + 1$ , les dérivées d'ordre égal contenues dans leurs seconds membres appartiennent exclusivement à  $u'_z$ ,  $v_z$ ,  $v'_2$  et sont de genres nécessairement inférieurs à ceux des premiers.

Cela pose, prenons parmi ces dernières formules celles dont les premiers membres sont à la fois de l'ordre  $k + 1$  et du premier genre : en vertu des remarques que nous venons de faire et de ce qui a été démontré antérieurement ou suppose, il est clair qu'elles donneront pour chacun des premiers membres dont il s'agit la valeur initiale unique que les relations ( $\Delta$ ), combinées avec les conditions initiales (40), assignent dans le système proposé à la dérivée correspondante de  $u$  ou  $v$ . On passera de même du premier genre au second, puis au troisième, et ainsi de suite jusqu'au genre  $k + 1$  de l'ordre  $k + 1$ , ce qui achèvera la démonstration du second point pour l'ordre en question, et, par suite, celle de la proposition directe énoncée au début de l'alinéa V.

(b) Pour démontrer la réciproque, nous observerons tout d'abord que, en vertu des formules primitives du système (39), supposées concordantes relativement aux conditions initiales (42), les fonctions  $u'_z$ ,



$v'_y, v'_z$  et leurs dérivées de tous ordres ont respectivement, dans le système en question, les mêmes valeurs initiales que les dérivées correspondantes de  $u, v$ ; car au nombre des relations primitives figurent les formules (36) et celles qu'on en déduit par des différentiations quelconques.

Cette remarque, combinée avec la nature des conditions initiales respectivement imposées aux intégrales hypothétiques des deux systèmes, fait voir immédiatement que les fonctions  $u, v$  et celles de leurs dérivées qui sont paramétriques relativement au système (34) admettent chacune la même valeur initiale de part et d'autre.

Finalement, si l'on veut se convaincre qu'il en est de même pour les dérivées principales de  $u, v$ , il suffira de différentier parallèlement les formules (33) et (35), et de raisonner de proche en proche en passant d'une classe à la suivante.

VI. Le système immédiat (34) étant supposé régulier, et la concordance numérique des formules primitivo-ultimes étant supposée y avoir lieu relativement aux conditions initiales (40), le système immédiat et linéaire (39) (II) sera lui-même régulier (III), et la concordance numérique des formules primitivo-ultimes y aura lieu relativement aux conditions initiales (42) (V). Ce système admettra donc un groupe d'intégrales ordinaires et un seul répondant aux conditions initiales (42) (33), et par suite (IV) le système (34) admettra un groupe d'intégrales ordinaires et un seul répondant aux conditions initiales (40).

35. *La proposition du numéro précédent subsiste pour un système immédiat, semi-régulier et non linéaire.*

Les raisonnements sont tout à fait analogues à ceux que nous venons de faire.

I. Considérons un système immédiat ( $\sigma$ ) déduit d'un autre système immédiat ( $\Sigma$ ) par la suppression de certaines équations différentielles, et supposons, pour fixer les idées, que le système ( $\sigma$ ) soit représenté par le Tableau :

(49)

|     | (u)                     | (v)                     | (w)                     |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (x) |                         | $\frac{dv}{dx} = \dots$ | $\frac{dw}{dx} = \dots$ |
| (y) |                         |                         | $\frac{dw}{dy} = \dots$ |
| (z) | $\frac{du}{dz} = \dots$ | $\frac{dv}{dz} = \dots$ |                         |
| (s) |                         |                         |                         |

où les cases vides entourées d'un double cadre correspondent aux équations supprimées de  $(\Sigma)$ .

Le système linéaire déduit de  $(\sigma)$  suivant le procédé indiqué au numéro précédent (I) se compose, comme on sait, de trois groupes d'équations que nous avons alors respectivement désignés par (E), (G), (K) : de ces trois groupes nous retiendrons seulement les deux premiers (E), (G), et nous nommerons  $(\sigma')$  le système différentiel formé par leur ensemble. En écrivant les diverses équations de ce dernier dans les cases d'un quadrillage rectangulaire d'après les dérivées qui figurent respectivement dans leurs premiers membres, et entourant ensuite certaines cases vides d'un double cadre, on obtiendra le Tableau :

(50)

|     | (u)                     | (v)                     | (w)                     | (u'_x)                     | (u'_y)                     | (u'_z)                     | (v'_y)                     | (v'_z)                     | (w'_z)                     | (w'_x)                     |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| (x) | $\frac{du}{dx} = u'_x$  | $\frac{dv}{dx} = \dots$ | $\frac{dw}{dx} = \dots$ |                            |                            |                            | $\frac{dv'_y}{dx} = \dots$ | $\frac{dv'_z}{dx} = \dots$ | $\frac{dw'_z}{dx} = \dots$ | $\frac{dw'_x}{dx} = \dots$ |
| (y) | $\frac{du}{dy} = u'_y$  | $\frac{dv}{dy} = v'_y$  | $\frac{dw}{dy} = \dots$ |                            |                            |                            |                            |                            | $\frac{dw'_z}{dy} = \dots$ | $\frac{dw'_x}{dy} = \dots$ |
| (z) | $\frac{du}{dz} = \dots$ | $\frac{dv}{dz} = \dots$ | $\frac{dw}{dz} = w'_z$  | $\frac{du'_x}{dz} = \dots$ | $\frac{du'_y}{dz} = \dots$ | $\frac{du'_z}{dz} = \dots$ | $\frac{dv'_y}{dz} = \dots$ | $\frac{dv'_z}{dz} = \dots$ |                            |                            |
| (s) | $\frac{du}{ds} = u'_s$  | $\frac{dv}{ds} = v'_s$  | $\frac{dw}{ds} = w'_s$  |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |

Dans chacune des colonnes  $(u'_x)$ ,  $(u'_y)$ ,  $(u'_s)$  du Tableau (50), les cases pleines, les cases vides entourées d'un simple cadre et les cases vides entourées d'un double cadre présentent la même disposition relative que dans la colonne  $(u)$  du Tableau (49); il en est de même pour les colonnes  $(v'_y)$ ,  $(v'_s)$  du premier Tableau par rapport à la colonne  $(v)$  du second, et ainsi de suite.

II. *Le système  $(\sigma')$  est immédiat et linéaire, et il en est de même du système  $(\Sigma')$  obtenu en écrivant dans les cases vides doublement encadrées du Tableau (50) des équations différentielles dont les seconds membres aient une forme convenablement choisie (par exemple se réduisent tous à zéro).*

III.  *$(\Sigma')$  est régulier ou irrégulier en même temps que  $(\Sigma)$ , et  $(\sigma')$  en même temps que  $(\sigma)$ ; d'où résulte que  $(\sigma')$  est semi-régulier toutes les fois que  $(\sigma)$  jouit de cette propriété.*

IV. *Si le système  $(\sigma)$  possède un groupe d'intégrales ordinaires*

$$u = U(x, y, z, s),$$

$$v = V(x, y, z, s),$$

$$w = W(x, y, z, s)$$

*satisfaisant aux conditions initiales*

$$51) \quad \begin{cases} u = \varphi(x, y, s) & \text{pour } z = z_0; \\ v = \varphi(y, s) & \text{» } x = x_0, z = z_0; \\ w = \psi(z, s) & \text{» } x = x_0, y = y_0, \end{cases}$$

*le système  $(\sigma')$  possède le groupe d'intégrales ordinaires*

$$\begin{aligned} u &= U, & v &= V, & w &= W, \\ u'_x &= \frac{dU}{dx}, & u'_y &= \frac{dU}{dy}, & u'_s &= \frac{dU}{ds}, \\ v'_y &= \frac{dV}{dy}, & v'_s &= \frac{dV}{ds}, \\ w'_z &= \frac{dW}{dz}, & w'_s &= \frac{dW}{ds}, \end{aligned}$$

*satisfaisant aux conditions initiales*

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \varphi(x_0, y_0, s_0) \\ v = \varphi(y_0, s_0) \\ w = \psi(z_0, s_0) \end{array} \right\} \text{ pour } x = x_0, y = y_0, z = z_0, s = s_0; \\ \left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{d\varphi}{dx} \\ u'_y = \frac{d\varphi}{dy} \\ u'_s = \frac{d\varphi}{ds} \end{array} \right\} \text{ pour } z = z_0; \\ \left\{ \begin{array}{l} v'_y = \frac{d\varphi}{dy} \\ v'_s = \frac{d\varphi}{ds} \end{array} \right\} \text{ pour } x = x_0, z = z_0; \\ \left\{ \begin{array}{l} w'_z = \frac{d\psi}{dz} \\ w'_s = \frac{d\psi}{ds} \end{array} \right\} \text{ pour } x = x_0, y = y_0.$$

Réciproquement, si le système  $(\sigma')$  possède un groupe d'intégrales ordinaires satisfaisant aux conditions initiales (52), les valeurs de  $u, v, w$  qui y figurent forment un groupe d'intégrales ordinaires du système  $(\sigma)$  satisfaisant aux conditions initiales (51).

V. Si la concordance numérique des relations primitivo-ultimes (ou primitives) a lieu dans le système  $(\sigma)$  relativement aux conditions initiales (51), elle a lieu dans le système  $(\sigma')$  relativement aux conditions initiales (52).

VI. En rapprochant du n° 33 les alinéas précédents, on obtient immédiatement la proposition à démontrer.

36. En résumé donc, tout système différentiel jouissant de la double propriété d'être : 1° immédiat; 2° régulier ou semi-régulier, possède un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales choisies de manière à assurer la concordance numérique des relations primitivo-ultimes.

Il en résulte qu'un semblable système, lorsqu'il est passif, possède un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales arbitrairement choisies.

37. L'intégration de tout système immédiat non linéaire peut se ramener à celle d'un système immédiat, mais linéaire; si l'un de ces systèmes est passif, l'autre l'est également, et si l'un d'eux est intégrable sous des conditions initiales arbitraires, le second jouit de la même propriété.

Le système linéaire auquel nous faisons ici allusion est précisément celui dont le mode de formation a été indiqué au n° 34 (I), et il est tout d'abord évident que la recherche des intégrales ordinaires du système proposé se ramène à celle des intégrales ordinaires du système ainsi obtenu. Il reste à démontrer que ceux-ci jouissent bien l'un par rapport à l'autre de la double propriété énoncée. Pour fixer les idées, nous raisonnerons sur les systèmes (34), (39).

1. Si l'on désigne par  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  deux fonctions olotropes en  $z = z_0$ , et par  $\nu(y, z)$  une fonction olotrope en  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ , il existe deux fonctions  $\psi(z)$ ,  $\varphi(y, z)$ , olotropes pour ces valeurs particulières, et satisfaisant respectivement aux deux systèmes de conditions

$$(53) \quad \frac{d\psi}{dz} = \lambda(z), \quad \psi(z_0) = u_0;$$

$$(54) \quad \frac{d\varphi}{dy} = \nu(y, z), \quad \left[ \frac{d\varphi}{dz} \right]_{y=y_0} = \mu(z), \quad \varphi(y_0, z_0) = v_0,$$

où  $u_0$ ,  $v_0$  désignent deux constantes quelconques.

Effectivement, chacune des trois équations différentielles

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = \lambda(z), \quad \frac{d\chi(z)}{dz} = \mu(z), \quad \frac{d\varphi(y, z)}{dy} = \nu(y, z)$$

(où les fonctions  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\varphi$  sont pour le moment inconnues) constitue à elle seule un système immédiat, régulier et passif. La première admet donc une intégrale  $\psi(z)$ , olotrope en  $z_0$  et s'y réduisant à  $u_0$ ; la se-

conde une intégrale  $\chi(z)$  olotrope en  $z_0$  et s'y réduisant à  $v_0$ ; la troisième une intégrale  $\varphi(y, z)$ , olotrope en  $y_0, z_0$  et se réduisant à  $\chi(z)$  pour  $y = y_0$ . Des deux fonctions  $v(z)$ ,  $\varphi(y, z)$  ainsi déterminées, la première satisfait évidemment aux conditions (53), et il est facile de voir que la deuxième satisfait aux conditions (54). En effet, pour des valeurs de  $y, z$  suffisamment voisines de  $y_0, z_0$ , on a l'identité

$$\varphi(y, z) = \chi(z) + (y - y_0)A,$$

où  $A$  désigne une fonction de  $y, z$  olotrope en  $y_0, z_0$ . Il en résulte d'abord

$$\varphi(y_0, z_0) = \chi(z_0) = v_0,$$

puis

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\chi}{dz} + (y - y_0) \frac{dA}{dz} = \mu(z) + (y - y_0) \frac{dA}{dz},$$

et enfin

$$\left[ \frac{d\varphi}{dz} \right]_{y=y_0} = \mu(z).$$

II. *Si le système proposé (34) est passif, ou bien s'il est intégrable sous des conditions initiales arbitraires, le système linéaire (39) jouit de la propriété correspondante.*

Effectivement, soient

$$(55) \quad \begin{cases} \left. \begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \end{array} \right\} \text{ pour } x = x_0, y = y_0, z = z_0; \\ \left. \begin{array}{l} u'_z = \lambda(z) \\ v'_z = \mu(z) \end{array} \right\} \text{ pour } x = x_0, y = y_0; \\ v'_y = v(y, z) \text{ pour } x = x_0 \end{cases}$$

des conditions initiales arbitrairement choisies pour les intégrales ordinaires du système (39), et  $v(z)$ ,  $\varphi(y, z)$  les deux fonctions définies à l'alinéa précédent.

Si l'on suppose en premier lieu que le système proposé (34) soit passif, la concordance numérique des relations primitivo-ultimes y a lieu par rapport aux conditions initiales (40): elle a donc lieu (34, V) dans le système (39) par rapport aux conditions initiales (42), qui

peuvent s'écrire sous la forme (55). Il en résulte que les deux expressions ultimes de chaque dérivée complexe du second ordre s'accordent numériquement dans le système (39), quelles que soient les conditions initiales imposées à ses intégrales, ce qui suffit, comme nous l'avons vu (22), pour que le système dont il s'agit soit passif.

Si l'on suppose, en second lieu, que le système (34) soit intégrable sous des conditions initiales arbitraires, il l'est en particulier sous les conditions initiales (40); le système (39) est donc intégrable (34, IV) sous les conditions initiales (42) ou (55), c'est-à-dire sous des conditions initiales arbitraires.

### III. Réciproquement

Soient  $v(z)$ ,  $\varphi(y, z)$  des déterminations initiales arbitrairement choisies pour les intégrales ordinaires du système (34).

Si l'on suppose passif le système (39), la concordance numérique des formules primitivo-ultimes y aura lieu relativement aux conditions initiales (42), et par suite (34, V) elle aura lieu dans le système (34) relativement aux conditions initiales (40). Ce dernier système est donc passif, en vertu du même raisonnement que plus haut.

Si l'on suppose enfin que le système (39) soit intégrable sous des conditions initiales arbitraires, il le sera en particulier sous les conditions initiales (42), et, par suite (34, IV), le système (34) sera intégrable sous les conditions initiales (40).

38. La réduction à quelque système linéaire d'un système donné qui ne l'est pas a été tout à l'heure utilisée comme artifice de démonstration (34); mais il convient, selon nous, de lui attribuer une portée infiniment plus grande. On remarquera en effet que l'on ne saurait, d'équations finies données, déduire des équations différentielles quelles qu'elles soient, sans passer par les relations *essentiellement linéaires* que la différentiation fournit tout d'abord. Ce fait autorise à penser que les équations linéaires forment une étape non moins essentielle dans la marche inverse qui conduit d'un système d'équations différentielles données à leurs intégrales.

**Systèmes immédiats qui ne sont ni réguliers ni semi-réguliers.**

39. Soient  $[i, l]$  un système partiel, immédiat et linéaire, et  $[I, L]$  le système de même forme défini à l'alinéa II du n° 29. Si le premier appartient à la catégorie des systèmes différentiels visés par l'énoncé du n° 29 ou par celui du n° 30, on peut, comme nous l'avons vu, disposer des constantes (10) de manière à réaliser à la fois dans le second toutes les conditions énoncées à l'alinéa III, et de là résultent successivement le théorème général du n° 33 et celui du n° 36. Mais, dans le cas contraire, il peut fort bien arriver que la détermination dont il s'agit cesse d'être possible; elle le sera toujours à la vérité si, dans les cercles de rayons  $r$  et de centres  $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$  que nous avons alors considérés (29, III), les coefficients des diverses dérivées paramétriques conservent des modules suffisamment petits, mais la démonstration générale n'en tombera pas moins en défaut. Cela induit à penser que *dans les systèmes immédiats qui ne sont ni réguliers ni semi-réguliers, l'existence des intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données est incertaine, même en supposant (ce qui est de toute nécessité) que ces dernières assurent la concordance numérique des relations primitivo-ultimes.*

*Et, par le fait, il existe des systèmes de cette espèce qu'un choix convenable des données initiales, tout en assurant la concordance dont il s'agit, laisse dépourvus des intégrales correspondantes.*

L'exemple très simple que nous allons traiter en fournira la preuve.

40. En appelant  $H_u, H_v$  deux constantes réelles et positives, nous considérerons le système

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x) \\ (y) \end{array} \right. \left[ \begin{array}{cc} (u) & (v) \\ \frac{du}{dx} = v + H_u \frac{du}{dy} & \\ \frac{dv}{dy} = u + H_v \frac{dv}{dx} \end{array} \right],$$

immédiat, passif et linéaire, mais qui n'est évidemment ni régulier ni



semi-régulier. Le système linéaire semblable construit, comme nous l'avons indiqué au n° 29 (II), est ici

$$\begin{array}{cc}
 (u) & (v) \\
 (x) & \left. \begin{array}{c} \frac{du}{dx} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \mu \Theta + \varepsilon \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Theta \frac{du}{dy} \\ \hline \frac{dv}{dy} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \mu \Theta + \varepsilon \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Theta \frac{dv}{dx} \end{array} \right\} \\
 (y) &
 \end{array}$$

où  $\Theta$  désigne la fonction

$$1 - [\alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(y - y_0) + \beta_1(u - u_0) + \beta_2(v - v_0)]$$

La démonstration du n° 29 (III) sera applicable si l'on peut disposer des constantes  $\varepsilon$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , de manière à avoir simultanément

$$\varepsilon < 1, \quad \varepsilon \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > H_u, \quad \varepsilon \frac{\alpha_2}{\alpha_1} > H_v,$$

c'est-à-dire

$$(57) \quad \varepsilon < 1, \quad \frac{H_u}{\varepsilon} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\varepsilon}{H_v}.$$

Il résulte de là que le produit  $H_u H_v$  doit être inférieur à  $\varepsilon^2$  et, par suite, à l'unité. Réciproquement, si l'on a  $H_u H_v < 1$ , on peut satisfaire aux inégalités (57) par une infinité de valeurs de  $\varepsilon$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , et le système (56) possède un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales arbitrairement choisies.

41. Mais, si l'on a au contraire  $H_u H_v > 1$ , la démonstration dont il s'agit cesse d'être applicable, et nous allons effectivement prouver qu'en supposant, pour plus de simplicité,  $H_u = H_v = H$ , le système

$$\begin{array}{cc}
 (u) & (v) \\
 (x) & \left. \begin{array}{c} \frac{du}{dx} = v + H \frac{du}{dy} \\ \hline \frac{dv}{dy} = u + H \frac{dv}{dx} \end{array} \right\} \\
 (y) &
 \end{array}
 \quad (58)$$

ainsi obtenu ne possède, pour  $H > 1$ , aucun groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales

$$(59) \quad \begin{cases} u = \gamma & \text{pour } x = 0, \\ v = x & \text{pour } y = 0. \end{cases}$$

I. On aperçoit d'abord sans difficulté que

$$u_{p,q}, \quad v_{p,q},$$

valeurs initiales fournies par les relations ultimes pour les dérivées (supposées principales)

$$\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}, \quad \frac{d^{p+q}v}{dx^p dy^q},$$

sont des polynômes entiers en  $H$  à coefficients positifs et entiers.

En outre, à cause de la symétrie parfaite tant du système (58) que des données initiales (59), les polynômes

$$u_{p,q}, \quad v_{q,p}$$

(où  $p$  doit être supposé au moins égal à 1) sont nécessairement identiques.

II. En appelant  $\partial_{p,q}$  le degré en  $H$  du polynôme  $u_{p,q}$  (où  $p > 0$ ), on a, quel que soit l'indice  $m (> 1)$ ,

$$(60) \quad \partial_{1,m-1} \geq \partial_{m-1,0}.$$

Car la différentiation  $\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}$ , exécutée sur l'équation de la première colonne du système (58), donne la relation primitive

$$\frac{d^m u}{dx dy^{m-1}} = \frac{d^{m-1} v}{dy^{m-1}} + H \frac{d^m u}{dy^m};$$

en remplaçant, dans le second membre, la dérivée principale  $\frac{d^{m-1} v}{dy^{m-1}}$

par son expression ultime, et faisant ensuite  $x = y = 0$ , on aura

$$u_{1,m-1} = v_{0,m-1} + \dots$$

ou, à cause de 1,

$$u_{1,m-1} = u_{m-1,0} + \dots$$

III. Dans les mêmes conditions, on a encore

$$(61) \quad \delta_{m,0} \geq \delta_{1,m-1} + m - 1.$$

Désignons, en effet, par  $p$  un entier quelconque de la suite

$$2, 3, \dots, m-1, m,$$

et exécutons sur la même équation que précédemment la différentiation

$\frac{d^{m-1}}{dx^{p-1} dy^{m-p}}$ ; elle donnera, pour  $x = y = 0$ ,

$$u_{p,m-p} = \dots + H u_{p-1,m-p+1},$$

d'où

$$\delta_{p,m-p} \geq \delta_{p-1,m-p+1} + 1.$$

En donnant successivement à  $p$  les diverses valeurs ci-dessus indiquées et ajoutant membre à membre les relations correspondantes, on arrive bien à l'inégalité (61).

IV. On a, quel que soit l'entier positif  $m$ ,

$$(62) \quad \delta_{m,0} \geq \frac{m(m-1)}{2} + 1.$$

Si  $m = 1$ , la relation  $u_{1,0} = H$  donne immédiatement  $\delta_{1,0} = 1$ . Dans le cas contraire, on a, par la combinaison des relations (60), (61),

$$\delta_{m,0} \geq \delta_{m-1,0} + m - 1;$$

en ajoutant membre à membre cette dernière inégalité avec celles qui s'en déduisent par la substitution successive de  $m-1$ ,  $m-2$ , ..., 2 à  $m$ , et avec l'égalité  $\delta_{1,0} = 1$ , on obtient précisément l'inégalité (62).

V. En vertu de la première remarque faite dans l'alinéa I, de la relation (62) et de l'hypothèse  $H > 1$ , on a

$$u_{m,0} \geq H^{\frac{m(m-1)}{2} + 1}.$$

Si donc on appelle  $\xi$  le module de  $x$ , et que l'on considère dans le développement de l'intégrale hypothétique  $u$  la partie indépendante de  $y$ , le terme général de cette dernière a un module au moins égal à

$$H^{\frac{m(m-1)}{2} + 1} \frac{\xi^m}{1 \cdot 2 \dots m}.$$

Or l'expression que nous venons d'écrire croît indéfiniment avec  $m$  pour toute valeur de  $\xi$  supérieure à zéro; car, en y remplaçant  $m$  par  $m+1$  et prenant le rapport de cette nouvelle expression à la première, on obtient

$$\frac{H^m}{m+1} \cdot \xi,$$

quantité que l'on démontre aisément être infinie avec  $m$  lorsque  $H$  est  $> 1$ .

La partie considérée dans le développement de  $u$  est donc une série divergente, le développement tout entier aussi, et, comme nous l'avons annoncé, les intégrales  $u$ ,  $v$  ne sauraient exister.

On arriverait, à plus forte raison, à la même conclusion, si l'on prenait comme déterminations initiales de  $u$ ,  $v$  des fonctions respectivement olotropes en  $x = 0$ ,  $y = 0$ , et dont les développements par la formule de Maclaurin eussent tous leurs coefficients positifs, ceux de  $x$  et de  $y$  ne tombant pas au-dessous de l'unité.

42. On voit par ce qui précède que, pour un système immédiat, même passif, qui n'est ni régulier ni semi-régulier, l'existence des intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données est essentiellement précaire. Elle dépend de la nature des composantes qui figurent dans les seconds membres des équations différentielles, comme aussi de la nature des déterminations initiales, et il peut fort

bien arriver qu'en modifiant les unes ou les autres (sans changer la répartition des cases pleines et vides dans le Tableau du système) les intégrales existent dans un cas et disparaissent dans un autre. Il n'entre pas dans notre cadre d'approfondir davantage cette aride question, à laquelle nous n'apercevons d'ailleurs, dans l'état actuel de l'Analyse, aucune application intéressante.

43. La remarque suivante est essentielle à noter. Un système immédiat qui n'est ni régulier ni semi-régulier peut parfois être privé d'intégrales répondant à certaines conditions initiales, mais *il n'en résulte pas que son intégration soit impossible*; car, en le résolvant par rapport à un autre groupe de dérivées, les cases pleines et vides (1) ne se trouvent plus réparties de la même manière dans le Tableau, et il peut arriver que le système, sans cesser d'être immédiat (8), devienne régulier ou semi-régulier, par suite, sujet au théorème du n° 36. Il n'y a là, d'ailleurs, rien de contradictoire : si, dans leur ensemble, les équations différentielles sont restées les mêmes, ou du moins équivalentes à ce qu'elles étaient primitivement, *l'économie des conditions initiales a été totalement bouleversée par les changements que cette transformation a opérés dans la répartition des cases pleines et vides*, et le paradoxe naissant de la coexistence de ces deux faits que, sous une forme, le système proposé n'a pas d'intégrales, tandis qu'il en possède sous une autre, se résout sans difficulté par cette simple remarque, que *les deux groupes de conditions initiales correspondant à ces deux formes ne sont pas du tout équivalents*.

Par exemple, sous la forme équivalente

$$\begin{array}{cc} (u) & (v) \\ (x) & \left[ \begin{array}{c|c} \frac{du}{dx} = v + H \frac{du}{dy} & \frac{dv}{dx} = -\frac{u}{H} + \frac{1}{H} \frac{dv}{dy} \\ \hline & \end{array} \right] , \\ (y) & \left[ \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right] \end{array}$$

le système (58), où nous supposerons  $H > 1$ , peut être intégré avec

les conditions initiales quelconques

$$\left. \begin{array}{l} u = \psi(\gamma) \\ v = \varphi(\gamma) \end{array} \right\} \text{ pour } x = x_0;$$

mais il est impossible de choisir les fonctions  $\psi$ ,  $\varphi$  de manière que les intégrales du système remplissent les conditions initiales indiquées au n° 41.



---

SUR LA

# REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

DES

## DIVISEURS DES NOMBRES,

PAR M. L. SAINT-LOUP,  
PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES SCIENCES D'ALGER.

---

La distribution des nombres premiers dans la suite des nombres a été l'objet de nombreuses recherches qui n'ont pas conduit à la solution de ce problème difficile.

Je me suis proposé d'examiner si une disposition graphique des nombres, autre que suivant une droite indéfinie, pouvait éclairer la solution, et je crois avoir été conduit à conclure que la recherche de la loi des nombres premiers paraissait devoir être abandonnée.

La disposition des nombres en triangle arithmétique m'a paru l'une des plus simples à essayer. Cette disposition m'a conduit à des propriétés assez curieuses au point de vue graphique, et d'ailleurs d'une démonstration simple <sup>(1)</sup>. C'est ainsi qu'on reconnaît aisément que : tous les multiples d'un nombre premier quelconque sont, dans cette disposition, répartis sur une parabole constante, indépendante du nombre considéré et dont le sommet serait transporté aux divers sommets d'un réseau quadrangulaire.

Cette même disposition permet d'établir de nombreuses formules de nombres n'admettant pas certains diviseurs. C'est ainsi que

$$y(y-1) + 41$$

---

(1) Note présentée à l'Institut par M. Darboux, le 2 juillet 1888.

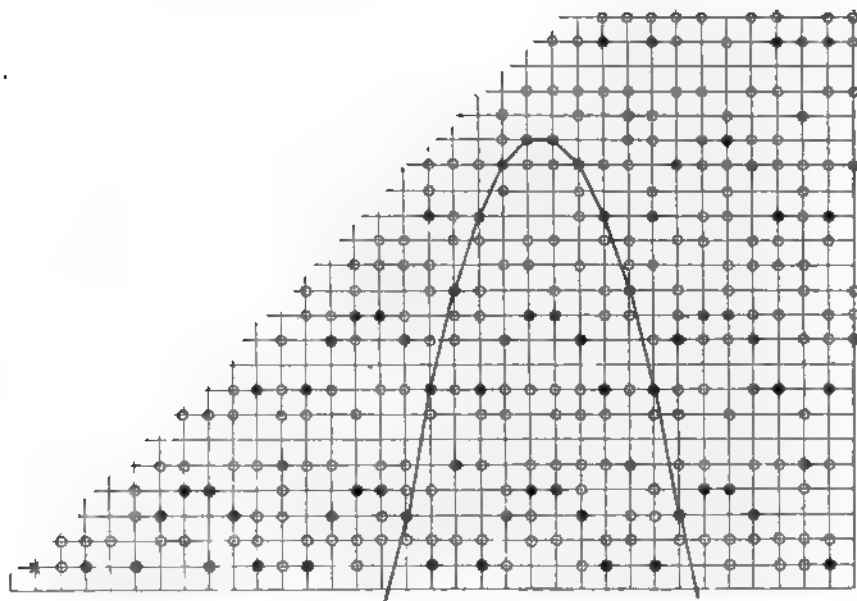
représente des nombres qui n'admettent aucun diviseur inférieur à 41,

$$y(y-1) + 59$$

n'admet aucun diviseur premier entre 23 et 43.

La *fig. 1* représente cette distribution parabolique. Les points marqués en noir sont les multiples de 7, les autres sont multiples de 3 et de 5.

Fig. 1.



× représente le point de départ 1, et le Tableau est constitué par

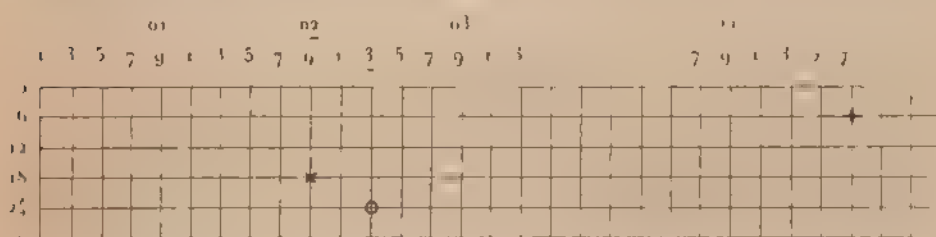
|   |    |    |    |   |   |
|---|----|----|----|---|---|
|   |    |    | 19 | . | . |
|   | 11 | 17 | .  | . | . |
| 5 | 9  | 15 | .  | . | . |
| 1 | 3  | 7  | 13 | . | . |

Le dernier point à droite et en haut correspond à 1167.

Si, au lieu d'une distribution parabolique, on avait une distribution rectiligne, le tracé devenait évidemment plus simple, et, en même temps, la lecture du nombre devenait plus facile, d'où résultait un double avantage.



On arrive à ce résultat par une disposition à la vérité arbitraire par son point de départ, mais qui permet de reconnaître graphiquement les diviseurs du nombre considéré. Voici en quoi elle consiste : Écrivons sur une ligne horizontale les 600 premiers nombres de la suite naturelle, en omettant les nombres pairs, au-dessous les 600 nombres suivants, et ainsi de suite indéfiniment (au nombre 600 on pourrait substituer un multiple de 10 quelconque). On pourra remplacer l'écriture de ces nombres par un point sur un papier quadrillé, en y joignant les indications propres à faciliter la lecture. On aura alors un Tableau tel que le suivant :





les diviseurs de 3, 5, 7 étant sur des verticales, 4 droites seulement auraient pu concourir en un point dans les limites précédentes.

Proposons-nous de déterminer les nombres premiers correspondant à un coefficient d'inclinaison donné. Nous avons vu que dans la base 600 les coefficients d'inclinaison des diviseurs

$$7, 11, 13, 17$$

étaient, l'axe des ordonnées étant dirigé vers le bas,

$$1, \frac{1}{3}, -1, 3.$$

Si l'on prend pour origine le point  $\times$  qui correspond à l'abscisse zéro, le nombre dont les coordonnées sont  $x, y$  est

$$By + 2x - 1.$$

Soit  $p$  un nombre premier appartenant à la première horizontale, son abscisse est  $\frac{p+1}{2}$ . Un point voisin appartenant à l'horizontale de rang  $\beta$  a pour coordonnées  $\frac{p+1}{2} \pm \alpha, \beta$ ; le nombre correspondant est

$$600\beta + p \pm 2\alpha.$$

Si ce nombre est un multiple de  $p$ ,

$$300\beta \pm \alpha$$

doit être divisible par  $p$ . Le coefficient d'inclinaison de la droite, qui joint les deux points, est d'ailleurs  $\pm \frac{\beta}{\alpha}$ .

Donnons à  $\alpha$  et  $\beta$  des valeurs entières simples que nous limiterons à 13 dans le but de restreindre la longueur de la droite qui joint deux points. On formera le Tableau suivant à double entrée. La première verticale contient les valeurs de  $\beta$ , la première horizontale contient les valeurs de  $\alpha$ ; les nombres du Tableau sont les valeurs de

$$300\beta + \alpha.$$

|   | 1    | 2   | 3   | 4   | 5 | 6 |
|---|------|-----|-----|-----|---|---|
| 1 | 301  | 302 | 303 | 304 | . | . |
| 2 | 601  | 602 | 603 | .   | . | . |
| 3 | 901  | 902 | .   | .   | . | . |
| 4 | 1201 | .   | .   | .   | . | . |
| 5 |      |     |     |     |   |   |

On formerait un semblable Tableau des valeurs de  $300\beta - \alpha$ .

Remplaçons les nombres par leurs facteurs premiers ; nous avons le Tableau suivant, où l'on n'a pas répété les facteurs qui correspondent à un même coefficient d'inclinaison, tel que  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

*Valeurs positives de  $\alpha$ .*

|    | 1      | 2      | 3       | 4    | 5     | 6     | 7      | 8     | 9     | 10    | 11     | 12  | 13     |
|----|--------|--------|---------|------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|-----|--------|
| 1  | 7.43   | 151    | 101     | 19   | 61    | 17    | 307    | 7.11  | 103   | 31    | 311    | 13  | 313    |
| 2  | 601    | .      | 67      | .    | 11    | .     | 607    | .     | 7.29  | .     | 13.47  | .   | 613    |
| 3  | 17.53  | 11.41  | .       | 113  | 181   | .     | 907    | 227   | .     | 7.13  | 911    | .   | 11.83  |
| 4  | 1201   | .      | 401     | .    | 241   | .     | 17.71  | .     | 13.31 | .     | 7.173  | .   | 1213   |
| 5  | 19.79  | 751    | 167     | 47   | .     | 251   | 11.137 | 13.29 | 503   | .     | 1511   | 7   | 17.89  |
| 6  | 1801   | .      | .       | .    | 19    | .     | 13.139 | .     | .     | .     | 1811   | .   | 7.37   |
| 7  | 11.191 | 1051   | 701     | 263  | 421   | 13    | .      | 31.17 | 19.37 | 211   | 2111   | 11  | 2113   |
| 8  | 7      | .      | 89      | .    | 13.37 | .     | 29.83  | .     | 11.73 | .     | 2411   | .   | 19.127 |
| 9  | 37.73  | 7.193  | .       | 13   | 541   | .     | 2707   | 677   | .     | 271   | 2711   | .   | 2713   |
| 10 | 3001   | .      | 7.11.13 | .    | .     | .     | 31.97  | .     | 17.59 | .     | 3011   | .   | 23.131 |
| 11 | 3301   | 13.127 | 367     | 7.59 | 661   | 19.29 | 3307   | 827   | 1103  | 331   | .      | 23  | 3313   |
| 12 | 13.277 | .      | .       | .    | 7.103 | .     | 3607   | .     | .     | .     | 23.157 | .   | 3613   |
| 13 | 47.83  | 1951   | 1301    | 61   | 11.71 | 7.31  | 3907   | 977   | 1303  | 17.23 | 3911   | 163 | .      |

On construit de même le Tableau correspondant à des valeurs négatives de  $\alpha$ .

*Valeurs négatives de  $\alpha$ .*

| 13      | 12  | 11    | 10    | 9     | 8     | 7      | 6     | 5     | 4     | 3     | 2     | 1      |    |
|---------|-----|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|----|
| 41      | .   | 17    | 29    | 97    | 73    | 293    | 7     | 59    | 37    | 11    | 149   | 13.23  | 1  |
| 587     | .   | 19.31 | .     | 197   | .     | 593    | .     | 7.17  | .     | 199   | .     | 599    | 2  |
| 887     | .   | 127   | 89    | .     | 223   | 19.47  | .     | 179   | 7     | .     | 449   | 29.31  | 3  |
| 1187    | .   | 29.41 | .     | 397   | .     | 1193   | .     | 239   | .     | 7.19  | 599   | 11.109 | 4  |
| 1487    | 31  | 1489  | .     | 7.71  | 373   | 1493   | 83    | .     | 11.17 | 499   | 7.107 | 1499   | 5  |
| 1787    | .   | 1789  | .     | .     | .     | 11.163 | .     | 359   | .     | .     | .     | 7.257  | 6  |
| 2087    | 29  | 2089  | 11.19 | 17.41 | 523   | .      | 349   | 419   | 131   | 233   | 1049  | 2099   | 7  |
| 7.11.31 | 199 | 2389  | .     | 797   | .     | 2393   | .     | 479   | .     | 17.47 | .     | 2399   | 8  |
| 2687    | 7   | 2689  | 269   | .     | 673   | 2693   | .     | 7.11  | 337   | .     | 19.71 | 2699   | 9  |
| 29.103  | .   | 7.161 | .     | 997   | .     | 41.73  | .     | .     | .     | 37    | .     | 2999   | 10 |
| 19.173  | 137 | .     | 7.47  | 1097  | 823   | 37.89  | 61    | 659   | 103   | 7.157 | 17.97 | 3299   | 11 |
| 17.211  | .   | 37.97 | .     | .     | .     | 3593   | .     | 719   | .     | .     | .     | 59.61  | 12 |
| .       | .   | 3889  | 389   | 1297  | 7.139 | 17.229 | 11.59 | 19.41 | 487   | 433   | 1949  | 7.557  | 13 |

Ce Tableau comprend treize colonnes verticales et treize colonnes horizontales. Admettons que les nombres inscrits dans ces colonnes

soient placés aux sommets d'un quadrillage, et soit un point  $\alpha, \beta$  de ce quadrillage, la distance de ce point à l'origine représentera  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , c'est-à-dire la longueur de l'élément du réseau d'un diviseur inscrit au point  $\alpha\beta$ . On choisira donc le coefficient d'inclinaison pouvant représenter un diviseur par la condition que  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  soit le plus petit possible. Ainsi, par exemple, nous trouvons le diviseur 19 aux coordonnées 4, 5 — 5, 6; il conviendra de prendre pour coefficient d'inclinaison  $\frac{1}{5}$ , parce que l'élément du réseau aura pour longueur  $\sqrt{17}$ , tandis qu'il aurait pour longueur  $\sqrt{26}$  ou  $\sqrt{61}$  aux deux autres points. Et il est évident qu'étant données les quatre sommets d'un parallélogramme, c'est par ses petits côtés que la figure sera le plus simplement définie.

En joignant à ce Tableau celui qu'on obtient en donnant à  $\alpha$  des valeurs négatives, on pourra dresser le Tableau des coefficients d'inclinaison les plus avantageux pour la représentation d'un diviseur dans la base considérée. Il suffira de choisir le diviseur le plus rapproché de l'origine dans le Tableau. Si l'on fait cet examen pour la suite des nombres premiers, on peut former le Tableau suivant :

| Nombre. | Coefficient | Nombre | Coefficient | Nombre | Coefficient | Nombre | Coefficient |
|---------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|
| 7       | 1 : 1       | 61     | 1 : 5       | 131    | 7 : 4       | 199    | 2 : 3       |
| 11      | 1 : 3       | 67     | 2 : 3       | 137    | 5 : 7       | 211    | 7 : 10      |
| 13      | 1 : 1       | 71     | 4 : 7       | 139    | 6 : 7       | 223    | 3 : 8       |
| 17      | 3 : 1       | 73     | 1 : 8       | 149    | 1 : 2       | 227    | 3 : 8       |
| 19      | 1 : 4       | 79     | 5 : 1       | 151    | 1 : 2       | 229    | 13 : 7      |
| 23      | 1 : 1       | 83     | 5 : 6       | 157    | 11 : 3      | 233    | 7 : 1       |
| 29      | 3 : 1       | 89     | 8 : 4       | 163    | 6 : 7       | 239    | 4 : 5       |
| 31      | 3 : 1       | 97     | 1 : 9       | 167    | 5 : 3       | 241    | 4 : 5       |
| 37      | — 1 : 4     | 101    | 1 : 3       | 173    | 4 : 11      | 251    | 5 : 6       |
| 41      | 3 : 2       | 103    | 1 : 9       | 179    | 3 : 5       | 257    | 6 : 1       |
| 43      | 1 : 1       | 107    | 5 : 2       | 181    | 3 : 5       | 263    | 7 : 4       |
| 47      | 5 : 4       | 109    | — 4 : 1     | 191    | 7 : 1       | 269    | 9 : 10      |
| 53      | 3 : 1       | 113    | 3 : 4       | 193    | 9 : 2       | 271    | 9 : 10      |
| 59      | — 1 : 5     | 127    | 11 : 2      | 197    | — 2 : 9     | 277    | 12 : 1      |

On voit qu'aux limites du Tableau, un seul des nombres  $\alpha, \beta$  atteint la valeur 13.

Nous avons supposé le nombre premier  $p$  situé sur la première horizontale; mais il est aisé de s'assurer que cette hypothèse n'est nullement nécessaire aux conclusions qui précèdent.

Une base étant choisie, nous avons vu qu'il convenait de choisir le coefficient  $\frac{\beta}{\alpha}$ , de façon que  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  fût aussi petit que possible. Mais on peut se proposer de déterminer la base de façon que la somme des tracés ait la moindre longueur. Sans avoir de méthode, *a priori*, pour résoudre cette question, on peut faire intervenir les considérations suivantes.

Observons d'abord qu'il est indispensable de fixer les diviseurs que l'on se propose de représenter. Nous supposons qu'il s'agit des diviseurs inférieurs à 150.

Soit  $2B$  la base, c'est-à-dire le nombre qui définit chaque ligne horizontale. Nous avons vu que, si un nombre premier  $p$  a pour coefficient d'inclinaison  $\pm \frac{\beta}{\alpha}$ , ce nombre divise  $B\beta \pm \alpha$ . Il convient donc de choisir  $B$  de façon que, pour les valeurs les plus faibles de  $\beta$  et  $\alpha$ , cette expression ait le plus grand nombre de diviseurs inférieurs à 150, et, comme les petits diviseurs sont ceux qui se répètent le plus dans le Tableau, il convient que leur signe représentatif soit simple.

Faisons  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$ , on devra choisir  $B$  de façon que  $B \pm 1$  ou  $B^2 - 1$  admette, s'il se peut, les diviseurs 3, 5, 7, 11, 13, ..., qui sont les plus encombrants. La base  $B$  devant être un multiple de 10 pour que les mêmes chiffres des unités se trouvent, sur des verticales, soit  $B = 10b$  et  $b = 1, 2, 3, \dots, 100$ , on obtient le Tableau suivant, d'où l'on a écarté les valeurs de  $B$  qui correspondent à moins de quatre diviseurs ou à des diviseurs supérieurs à 150, et où l'on a inscrit les diviseurs à coefficient  $\pm 1$  ou infini.

| B.  | Diviseurs.     | B.  | Diviseurs.         | B.   | Diviseurs.            |
|-----|----------------|-----|--------------------|------|-----------------------|
| 70  | 3. 7. 23. 71   | 220 | 3. 11. 13. 17. 73  | 560  | 3. 7. 11. 13. 17. 43  |
| 90  | 3. 7. 13. 89   | 260 | 3. 7. 13. 29. 37   | 610  | 3. 7. 13. 29. 47. 61  |
| 110 | 3. 11. 37. 109 | 300 | 3. 7. 13. 23. 43   | 650  | 3. 7. 11. 13. 31. 59  |
| 130 | 3. 13. 43. 131 | 340 | 3. 11. 17. 31. 113 | 780  | 3. 11. 13. 19. 41. 71 |
| 140 | 3. 7. 47. 139  | 370 | 3. 7. 37. 41. 53   | 870  | 3. 11. 13. 29. 67. 79 |
| 160 | 3. 7. 23. 53   | 390 | 3. 7. 31. 39. 83   | 900  | 3. 17. 29. 31. 53     |
| 170 | 3. 13. 17. 19  | 550 | 3. 11. 19. 29. 61  | 1000 | 3. 7. 11. 13. 37      |

Les diviseurs indiqués dans ce Tableau pour chaque base considérée correspondent à des points successifs du quadrillage, soit verticalement, soit en diagonale.

On voit que les plus petits diviseurs appartiennent aux bases

170, 300, 560, 610, 900, 1000.

Il est permis de les considérer comme pouvant être avantageusement choisies pour la simplicité du tracé, et nous allons les comparer.

Soit  $N$  le plus grand nombre du Tableau des nombres;  $\frac{N}{p}$  est le nombre des multiples de  $p$  inférieurs à  $N$ . Ces multiples étant joints, de deux en deux, par une droite de longueur  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\frac{N}{2p} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  est la longueur du tracé pour le diviseur  $p$ .

Calculons  $\sum \frac{\alpha^2 + \beta^2}{p}$  pour les bases

90, 170, 300, 560, 1000,

nous trouvons les nombres

3060, 3070, 3020, 2650, 3140.

Il résulte de ce calcul que la base 560 paraîtrait devoir être préférée; mais il se dégage de ce calcul ce fait remarquable que les longueurs des réseaux sont sensiblement les mêmes. On est conduit à induire de là que cette longueur est sans doute indépendante du choix de la base quand le Tableau s'étend à un nombre croissant de diviseurs.

Quoique cette conclusion ne soit pas rigoureusement établie, il n'est pas moins reconnu que le choix de la base paraît devoir être déterminé simplement par les facilités matérielles de l'exécution du tracé. On peut toutefois démontrer que, quelle que soit la base, la surface du parallélogramme, déterminée par quatre sommets deux à deux consécutifs, est égale au nombre premier  $p$  qui le définit.

Soient, en effet,  $P, P'$  deux sommets consécutifs sur la première horizontale,  $A, A'$  deux autres sur la seconde horizontale. L'intervalle  $PP'$  étant de  $p$  divisions, la surface du parallélogramme  $PAA'P'$  est égale à  $p$ ; et l'on voit que la surface de tout parallélogramme ayant deux sommets consécutifs sur la droite  $PA$  et ses deux autres sur la ligne  $P'A'$  est aussi égale à  $p$ .

D'après cela, étant donné un nombre premier  $p$  et son coefficient d'inclinaison, celui-ci permettra de tracer le point  $P'$ , immédiatement

voisin, et le théorème précédent permettra de compléter le parallélogramme.

Soit, par exemple,  $p = 17$ , le point voisin A est  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$ , la relation

$$\beta PP' = p', \text{ d'où } PP' = q + \frac{r}{\beta}$$

donne

$$PP' = \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}.$$

Il faut donc compter horizontalement 5 divisions plus  $\frac{2}{3}$ . Or la ligne PA détermine sur les horizontales qu'elle coupe des segments qui sont des fractions de l'unité dont le dénominateur est 3 et dont les numérateurs sont 1, 2, .... C'est donc sur la seconde horizontale que se trouvera le point A', troisième sommet du parallélogramme.

Généralement un segment quelconque, déterminé sur l'horizontale  $\beta'$ , a pour expression

$$\frac{\alpha(\beta - \beta')}{\beta},$$

en sorte que

$$r = \alpha(\beta - \beta').$$

Dans le cas actuel,  $r = 2$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$ , d'où  $\beta' = 1$ .

Nous avons supposé que les deux sommets consécutifs P, P' étaient sur la première horizontale. Si le nombre P est seul sur la première horizontale et si  $\beta$  est l'ordonnée du second point P', on reconnaît aisément que l'aire du parallélogramme est égale à  $p\beta$ , mais il n'y a plus qu'un seul point sur une horizontale.

### Conclusions.

L'étude qui précède conduit aux conclusions suivantes :

On peut appliquer le procédé graphique à la construction d'une Table des diviseurs des nombres en limitant la grandeur de ces diviseurs; ainsi ce Tableau pourrait faire connaître les nombres ayant des diviseurs inférieurs à 150. Cette Table aurait quelque utilité pratique pour le calcul des rouages.



Supposons le quadrillage de  $2^{\text{mm}}$ . Sur un cylindre de  $14^{\text{mm}}$  de circonférence ou un multiple de ce nombre, gravons le réseau de 7. Si l'on fait rouler ce cylindre sur un plan, il imprimera indéfiniment ce réseau.

Pour assurer ce roulement, le cylindre devra être muni d'une denture du pas de  $2^{\text{mm}}$ , engrenant avec une crémaillère de même pas disposée sur le plan.

Tout autre cylindre, ayant une denture de même pas et correspondant au réseau d'un autre nombre premier  $p$ , superposera convenablement ce réseau : il suffira de régler le départ.

Si l'on admet que l'on s'arrête à des cylindres de  $1^{\text{m}}$  de diamètre, ce cylindre pourra porter  $1000 \times \pi$  ou 3141 horizontales, suivant ses génératrices, et, par conséquent, le réseau du nombre premier 3137, immédiatement inférieur à 3141.

On aura donc ainsi réalisé une Table des diviseurs des nombres jusqu'au diviseur 3137, et une Table des nombres premiers jusqu'à  $3137^2 = 10840000$ .

L'exécution aura exigé 443 cylindres (dans la base, 600), attendu que 3137 est le 445<sup>e</sup> nombre premier.

Le Tableau aura une longueur de  $33^{\text{m}}$  et une largeur de  $0^{\text{m}}, 60$ . On pourra le fragmenter comme on voudra dans le sens de sa longueur et dans celui de sa largeur.



---

SUR UNE  
ÉQUATION DU PREMIER ORDRE  
ET  
L'ÉQUATION DE JACOBI,

PAR M. ELLIOT,  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

---

1. On sait que les équations différentielles, telles que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_2}{P_1},$$

où  $P_2$  est un polynôme du troisième degré, et  $P_1$  un polynôme du premier degré en  $y$  dont les coefficients sont des fonctions quelconques de la variable indépendante  $x$ , peuvent être ramenées à la forme

$$\frac{dy}{dx} = Q_2,$$

où  $Q_2$  est un polynôme du troisième degré en  $y$ . Ces équations, étudiées par MM. Appell et Roger Liouville, admettent comme forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J.$$

Lorsque le polynôme  $P_2$  est seulement du second degré en  $y$ , on peut adopter une autre forme canonique.

Considérons l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Py^2 + Qy + R}{Sy + T},$$

où  $P, Q, R, S, T$  sont des fonctions quelconques de  $x$ . Si l'on fait le changement de fonction

$$y = aY + b,$$

où  $a$  et  $b$  désignent des fonctions indéterminées de  $x$ , l'équation conserve la même forme, et l'on a

$$\frac{dY}{dx} = \frac{P_1 Y^2 + Q_1 Y + R_1}{S_1 Y + T_1},$$

en posant

$$P_1 = P a^2 - S a a',$$

$$Q_1 = 2 P a b + Q a - S a b' - (S b + T) a',$$

$$R_1 = P b^2 + Q b + R - b' (S b + T),$$

$$S_1 = S a^2,$$

$$T_1 = a (S b + T).$$

Si l'on profite des fonctions  $a$  et  $b$  pour annuler  $P_1$  et  $T_1$ , on aura

$$\frac{a'}{a} = \frac{P}{S}, \quad b = -\frac{T}{S},$$

et l'équation (1) se transformera dans l'équation réduite

$$(2) \quad \frac{dY}{dx} + I = \frac{H}{Y},$$

où  $I$  et  $H$  ont les valeurs suivantes :

$$I = \frac{2PT - QS + TS' - T'S}{S^2 e^{\int \frac{P}{S} dx}}, \quad H = \frac{PT^2 - QST + S^2 R}{S^3 e^{\int \frac{P}{S} dx}}.$$

L'exponentielle introduit un facteur constant  $h$  dans  $I$ , et son carré  $h^2$  dans  $H$ . Ces facteurs répondent au simple changement de  $Y$  en  $hY$  dans l'équation réduite.

On pourra ensuite, par un changement de la variable indépendante, faire en sorte que  $H$  ou bien  $I$  se réduise à l'unité.

Les fonctions  $I$  et  $H$  sont des invariants relativement au changement de fonction, et sont aussi des invariants relativement au changement de la variable. Si l'on effectue à la fois ces deux changements,

$$y = a y_1 + b, \quad \frac{dx_1}{dx} = c,$$

où  $a, b, c$  sont des fonctions indéterminées de  $x$ , l'équation (1) conserve la même forme, mais les coefficients de l'équation transformée ont maintenant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} P_1 &= P a^2 - S a a', \\ Q_1 &= 2 P a b + Q a - S a b' - (S b + T) a', \\ R_1 &= P b^2 + Q b + R - (S b + T) b', \\ S_1 &= S a^2 c, \\ T_1 &= a c (S b + T). \end{aligned}$$

En calculant les nouvelles expressions  $I_1$  et  $H_1$ , on reconnaîtra aisément que

$$I_1 = \frac{1}{c} I, \quad H_1 = \frac{1}{c} H.$$

Les fonctions  $I$  et  $H$  sont donc bien des invariants, et le rapport  $\frac{H}{I} = J$  est un invariant absolu.

Si, dans l'équation réduite (2), on fait le changement de la variable indépendante définie par

$$\frac{dX}{dx} = I,$$

on la ramènera à l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} + 1 = \frac{J}{Y},$$

et l'on reconnaît immédiatement que  $X$  est un invariant absolu.

En posant  $Y = \frac{1}{Z}$ , on voit que l'équation canonique équivaut à celle-ci

$$\frac{dZ}{dX} = Z^2 - JZ^3,$$

et qu'elle peut être regardée comme l'équation canonique répondant aux équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = Q_3,$$

où le polynôme  $Q_3$  du troisième degré en  $y$  admet une racine double.

L'introduction du facteur  $h$  dans  $I$  et de  $h^2$  dans  $H$  donne, d'ail-

leurs, des équations canoniques qui se déduisent immédiatement les unes des autres. Posons

$$I_1 = hI, \quad H_1 = h^2H,$$

on aura

$$J_1 = hJ, \quad \frac{dX_1}{dx} = hI = h \frac{dX}{dx};$$

d'où l'on conclut

$$X_1 = hX + h_1,$$

$h_1$  désignant une nouvelle constante. L'équation canonique

$$\frac{dY_1}{dX_1} + 1 = \frac{J_1}{Y_1}$$

se déduit de l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} + 1 = \frac{J}{Y},$$

en posant  $Y_1 = hY$ .

Supposons que les coefficients de l'équation proposée soient tous constants, on aura évidemment, en désignant par  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $k$  trois constantes,

$$I = \lambda e^{kx}, \quad H = \mu e^{2kx}, \quad \frac{dX}{dx} = \lambda e^{kx}, \quad X = \frac{\lambda}{k} e^{kx}, \quad J = \frac{\mu}{\lambda^2} X.$$

L'équation canonique est homogène. Si, comme cas particulier, la constante  $k$  est nulle, il est clair que  $J$  se réduit à une constante. Les mêmes conclusions subsistent si, au lieu de supposer constants les coefficients de l'équation proposée, on suppose qu'ils soient susceptibles de le devenir par un changement convenable de fonction et de variable, puisque  $J$  et  $X$  sont des invariants absolus.

Ces cas d'intégrabilité, qui se traduisent par la propriété qu'a  $\frac{dJ}{dX}$ , ou bien  $J$ , de se réduire à une constante, se reconnaîtront sur l'équation réduite (2) et sans passer par l'équation canonique, par les caractères

$$\frac{\left(\frac{H}{I}\right)'}{I} = \text{const.} \quad \text{ou bien} \quad \frac{H}{I} = \text{const.}$$

2. Faisons, dans l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + 1 = \frac{H}{y},$$

le changement de fonction  $y = u + \frac{1}{ay_1 + b}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $u$  étant des fonctions quelconques de  $x$ . L'équation se transforme en une autre, où  $\frac{dy_1}{dx}$  est le quotient d'un polynôme du troisième degré en  $y_1$  par un polynôme du premier degré. Mais on voit aisément que le polynôme du troisième degré se réduit à un polynôme du second degré, si  $u$  est une solution particulière de l'équation (1). Les invariants  $I_1$  et  $H_1$  de la nouvelle équation ne dépendront pas des fonctions  $a$  et  $b$ . On sait, en effet, que si l'on fait le changement de fonction  $y_1 = \alpha y_2 + \beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des fonctions quelconques de  $x$ , les invariants ne dépendent pas de  $\alpha$  et  $\beta$ . La transformation devient alors

$$y = u + \frac{1}{a(\alpha y_2 + \beta) + b}.$$

En prenant  $\alpha x = 1$ ,  $\beta a + b = 0$ , on voit qu'on peut se borner à faire la substitution  $y = u + \frac{1}{z}$ . L'équation (1) devient

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{(u' + 1)z^2}{uz + 1},$$

et les invariants de cette équation sont

$$(3) \quad I_1 = \frac{3H - 1u}{u^3} e^{-\int \frac{1}{u} dx}, \quad H_1 = \frac{H}{u^6} e^{-2\int \frac{1}{u} dx}.$$

On ramène d'ailleurs l'équation (2) à la forme

$$\frac{dy_1}{dx} + I_1 = \frac{H_1}{y_1}$$

par le changement de fonction

$$z = u e^{\int \frac{1}{u} dx} y_1 - \frac{1}{u}$$

et, par suite,

$$y = u + \frac{1}{z} = \frac{u^3 y_1}{u^2 y_1 - e^{-\int \frac{1}{u} dx}}.$$

Toutes les fois qu'on saura intégrer une équation où les invariants sont  $I$  et  $H$ , on saura donc intégrer une infinité d'autres équations dont les invariants sont  $I_1$  et  $H_1$ , en utilisant les solutions particulières de la première.

Cherchons, par exemple, quelles sont les équations que l'on peut intégrer en les ramenant, par la remarque précédente, à d'autres où le rapport

$$\frac{\left(\frac{H_1}{I_1}\right)'}{I_1} = k,$$

$k$  étant une constante. On a, d'après la relation (3),

$$\frac{\left(\frac{H_1}{I_1}\right)'}{I_1} = \frac{(HI' - IH')u^3 - 2HI^2u^2 + 6H^2Iu - 6H^3}{(3H - Iu)^3}.$$

L'équation (1) sera donc intégrable si l'une de ses solutions satisfait à l'équation du troisième degré

$$(4) \quad (HI' - IH')u^3 - 2HI^2u^2 + 6H^2Iu - 6H^3 = k(3H - Iu)^3.$$

Par exemple, l'équation dont les deux invariants sont

$$I = (3f - 1)f', \quad H = f^2(1 - f)f',$$

$f$  étant une fonction de  $x$ , pourra être ramenée à une équation où le rapport  $\frac{H_1}{I_1}$  est constant; car l'équation

$$\frac{dy}{dx} + 1 = \frac{H}{y}$$

admet la solution particulière  $u = f(1 - f)$ , qui est une racine de l'équation du troisième degré

$$(HI' - IH')u^3 - 2HI^2u^2 + 6H^2Iu - 6H^3 = 0.$$

Mais ce caractère d'intégrabilité étant d'une application à peu près impossible, nous en simplifierons la recherche en supposant que l'on prenne pour point de départ l'équation canonique

$$\frac{dy}{dx} + 1 = \frac{J}{y}.$$

Si l'on fait dans l'équation (4)  $I = 1$ ,  $H = J = uu' + u$ , on obtient

$$-uu'' = (3u' + 2)[k(3u' + 2)^2 + (u' + 1)(2u' + 1)]$$

ou bien

$$\frac{du}{u} + \frac{u' du'}{(3u' + 2)[(9k + 2)u'^2 + 3(4k + 1)u' + 4k + 1]} = 0.$$

Intégrant cette équation et  $C$  désignant une constante arbitraire,

$$Cu(3u' + 2)^2 = (9k + 2)u'^2 + 3(4k + 1)u' + 4k + 1$$

ou

$$(9Cu - 9k - 2)u'^2 + [12Cu - 3(4k + 1)]u' + 4Cu - 4k - 1 = 0.$$

Résolvant cette équation par rapport à  $u'$ , on obtient, en posant

$$1 + 4k - 4Cu = t^2,$$

l'équation différentielle

$$\frac{dt}{4C dx} = \frac{1}{3t \pm 1}.$$

L'intégration de cette équation donne, en appelant  $C_1$  une nouvelle constante arbitraire,

$$3t^2 \pm 2t + 2C_1 - 8Cx = 0.$$

Connaissant  $t$ , on en conclura la solution particulière  $u$  et l'expression de  $J = u(u' + 1)$ . Cette expression contiendra la quantité irrationnelle  $\sqrt{1 - 6C_1 + 24Cx}$ , qui provient de la résolution de l'équation du second degré en  $t$ . Faisons la substitution linéaire

$$1 - 6C_1 + 24Cx = 4X,$$

de façon que l'irrationnelle soit simplement la racine carrée de la nouvelle variable, et en même temps la substitution

$$6Cy = Y,$$

afin que l'équation conserve la forme canonique. On obtiendra alors l'expression suivante de l'invariant absolu  $J$

$$J = \pm \frac{2}{9} \frac{9k + 2}{\sqrt{X}} + \frac{2}{9} [3(3k + 1) - X].$$

Les équations caractérisées par cette valeur de  $J$  sont, comme nous le verrons plus loin, des équations de Jacobi.



## Équation de Jacobi.

3. L'équation de Jacobi est, comme on sait,

$$(1) \quad \begin{cases} (lx + l'y + l'')(x dy - y dx) \\ - (mx + m'y + m'') dy + (nx + n'y + n'') dx = 0, \end{cases}$$

où  $l, l', l'', m, m', m'', n, n', n''$  sont des constantes. On peut l'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l'y^2 + (lx + l'' - n')y - (nx + n'')}{(l'x - m')y + lx^2 + (l'' - m'')x - m''}.$$

Elle rentre donc dans la catégorie d'équations dont nous nous occupons.

En calculant les deux invariants I et H, on trouve que I est le quotient d'un polynôme du premier degré par le cube de la fonction linéaire  $l'x - m'$ , et que H est le quotient d'un polynôme du troisième degré par la cinquième puissance de cette même fonction linéaire. Les coefficients des deux polynômes ne sont pas arbitraires. Ils doivent satisfaire, comme nous allons voir, à deux relations.

Remarquons d'abord que, par un simple changement de notations, on peut mettre l'équation qui précède sous la forme

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + (n_1x + n)y + p_1x + p}{(x + m)y + n_1x^2 + q_1x + q},$$

où  $m, n, n_1, p, p_1, q, q_1$  sont des constantes. On peut supposer aussi que l'on a ramené le coefficient de  $y$  au dénominateur à être  $x$  au moyen de la substitution  $x + m = x_1$ .

Cela revient à supposer  $m = 0$  dans l'équation (2), qui devient

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + (n_1x + n)y + p_1x + p}{xy + n_1x^2 + q_1x + q}.$$

Les deux invariants sont

$$I = h \frac{(2q_1 - n)x + 3q}{x^3},$$

$$H = h^2 \frac{x^2(p_1x + p) + (n_1x^2 + q_1x + q)[(q_1 - n)x + q]}{x^5},$$

$h$  étant la constante qui provient de l'exponentielle  $e^{\int \frac{dx}{x}}$ . Si nous identifions avec les expressions suivantes

$$I = \frac{A_1 x + A_0}{x^3}, \quad H = \frac{B_3 x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{x^5},$$

où les  $A$  et les  $B$  sont des coefficients constants, on devra satisfaire aux équations

$$(4) \quad \begin{cases} h(2q_1 - n) = A_1, & 3qh = A_0, \\ h^2[p_1 + n_1(q_1 - n)] = B_3, & h^2[p + n_1q + q_1(q_1 - n)] = B_2, \\ h^2q(2q_1 - n) = B_1, & h^2q^2 = B_0. \end{cases}$$

En comparant la deuxième et la dernière de ces équations, puis la première, la deuxième et la cinquième, on aperçoit immédiatement les deux relations

$$\frac{A_0^2}{9} = B_0, \quad \frac{A_0 A_1}{3} = B_1.$$

Si on les suppose vérifiées, on pourra faire l'identification d'une infinité de façons. Il suffira de prendre

$$(5) \quad \begin{cases} q = \frac{A_0}{3h}, & n = \frac{2hq_1 - A_1}{h}, \\ p_1 = \frac{h^2 n_1 q_1 - h n_1 A_1 + B_3}{h^2}, & p = \frac{h^2 q_1^2 - \frac{1}{3} h n_1 A_0 - h q_1 A_1 + B_2}{h^2}, \end{cases}$$

où  $h$ ,  $q_1$ ,  $n_1$  demeurent arbitraires.

L'équation

$$(6) \quad \frac{dY}{dx} + \frac{A_1 x + A_0}{x^3} = \frac{B_3 x^3 + B_2 x^2 + \frac{1}{3} A_0 A_1 x + \frac{1}{9} A_0^2}{x^5 Y},$$

peut donc être considérée comme provenant d'une infinité d'équations de Jacobi, et, comme les solutions de l'une quelconque d'entre elles sont liées à celles de l'équation (6) par des relations connues, il est naturel de chercher si l'on ne peut pas profiter de l'indétermination de  $h$ ,  $q_1$ ,  $n_1$  pour en simplifier l'intégration.

Mettons l'équation (3) sous la forme habituelle de l'équation de Jacobi

$$(7) \quad (y + n_1 x)(x dy - y dx) + (q_1 x + q) dy - (p_1 x + n y + p) dx = 0.$$

On sait que cette équation admet, en général, trois intégrales linéaires. Ces intégrales s'obtiennent en posant  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ , les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  étant déterminées par les équations

$$(8) \quad \begin{cases} (q_1 + \lambda)\alpha + p_1\beta - n_1\gamma = 0, \\ (n + \lambda)\beta - \gamma = 0, \\ q\alpha + p\beta + \lambda\gamma = 0, \end{cases}$$

en prenant pour  $\lambda$  l'une des racines de l'équation du troisième degré obtenue en égalant à zéro le déterminant des équations précédentes, c'est-à-dire

$$(9) \quad \lambda^3 + (n + q_1)\lambda^2 + (p + nq_1 + n_1q)\lambda + pq_1 - p_1q + nn_1q = 0.$$

Rappelons en outre que, si l'on désigne par  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  les racines supposées inégales de l'équation (9), et par  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  les valeurs des constantes répondant à la racine  $\lambda_1$ , etc., l'intégrale générale de l'équation (7) est

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)^{\lambda_2 - \lambda_3} (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)^{\lambda_3 - \lambda_1} (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{const.}$$

Remplaçons dans l'équation (9)  $p$ ,  $p_1$ ,  $n$ ,  $q$  par leurs valeurs tirées des équations (5). On obtient

$$\begin{aligned} n + q_1 &= 3q_1 - \frac{A_1}{h}, \\ p + nq_1 + n_1q &= 3q_1^2 - \frac{3q_1}{h}A_1 + \frac{B_2}{h^2}, \\ pq_1 - p_1q + nn_1q &= q_1^3 - \frac{q_1^2}{h}A_1 + \frac{q_1}{h^2}B_2 - \frac{A_0B_3}{3h^3}, \end{aligned}$$

et la substitution de ces valeurs ramène l'équation (9) à celle-ci :

$$(10) \quad h^3(\lambda + q_1)^3 - A_1 h^2(\lambda + q_1)^2 + B_2 h(\lambda + q_1) - \frac{A_0 B_3}{3} = 0.$$

D'après la méthode de réduction indiquée dans le n° 1, on passe de l'équation (3) à l'équation (6) par la substitution

$$y = \frac{x}{h} Y - \frac{n_1 x^2 + q_1 x + q}{x},$$

d'où l'on tire

$$Y = \frac{h}{x^2} (xy + n_1 x^2 + q_1 x + q).$$

Remplaçons  $y$  par  $-\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$ . On tire les rapports  $\frac{\gamma}{\beta}$  et  $\frac{\alpha}{\beta}$  des deux premières équations (8). Ces valeurs sont, en tenant compte des relations (5),

$$\frac{\gamma}{\beta} = 2q_1 + \lambda - \frac{A_1}{h}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_1(\lambda + q_1) - \frac{B_3}{h^2}}{\lambda + q_1}.$$

On trouvera donc, pour les trois solutions particulières de l'équation (6),

$$Y = \frac{B_3}{h(\lambda + q_1)} + [A_1 - h(\lambda + q_1)] \frac{1}{x} + \frac{A_0}{3} \frac{1}{x^2}.$$

La constante  $n_1$  n'entre pas dans cette expression; les constantes  $h$  et  $q_1$  n'entrent que sous la combinaison  $h(\lambda + q_1)$ , dont dépend seulement l'équation (10). Les trois solutions particulières de l'équation (6) sont donc les mêmes, quelles que soient les équations de Jacobi dont elle provient, et son intégrale générale pourra s'écrire sous une forme analogue à celle qui a été indiquée plus haut. Les quotients des différences des racines de l'équation (10) qui servent à déterminer les exposants restent aussi les mêmes quand on donne à  $h$  et  $q_1$  des valeurs quelconques.

En faisant  $h = 1$ ,  $q_1 = 0$ , on voit que la formation de l'intégrale dépend de la résolution de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + B_2\lambda - \frac{1}{3}A_0B_3 = 0.$$

4. On peut, par un changement de la variable indépendante, ramener l'équation de Jacobi à la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} + 1 = \frac{J}{Y}.$$

$J$  et  $X$  étant des invariants absolus, l'expression de  $J$  en  $X$  est indépendante d'un changement de variable fait dans l'équation (6) du numéro précédent, et aussi du changement de  $x + m$  en  $x$  qui a déjà servi à simplifier cette équation.

Si, dans l'équation (6), on pose  $x = \frac{1}{x_1}$ , elle devient

$$\frac{dY}{dx_1} = A_0x_1 + A_1 - \frac{B_0x_1^3 + B_1x_1^2 + B_2x_1 + B_3}{Y},$$

les coefficients étant toujours assujettis à satisfaire aux deux relations

$$A_0^2 = 9B_0, \quad A_0 A_1 = 3B_1.$$

Les deux invariants  $I_1$  et  $H_1$  sont donc deux polynômes du premier et du troisième degré

$$-I_1 = A_0 x_1 + A_1, \quad -H_1 = \frac{1}{9} A_0^2 x_1^3 + \frac{1}{3} A_0 A_1 x_1^2 + B_2 x_1 + B_3.$$

La variable canonique  $X$  est définie par

$$X = - \int I_1 dx_1 = -\frac{1}{2} A_0 x_1^2 - A_1 x_1;$$

$x_1$  est donné par l'équation du second degré

$$A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 + 2X = 0.$$

Si l'on effectue la division de  $\frac{1}{9} A_0^2 x_1^3 + \frac{1}{3} A_0 A_1 x_1^2 + B_2 x_1 + B_3$  par  $A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 + 2X$ , on trouve comme reste

$$(B_2 - \frac{2}{9} A_0 X - \frac{2}{9} A_1^2) x_1 + B_3 - \frac{2}{9} A_1 X.$$

On en conclut

$$J = \frac{H_1}{I_1} = \frac{(B_2 - \frac{2}{9} A_0 X - \frac{2}{9} A_1^2) x_1 + B_3 - \frac{2}{9} A_1 X}{A_0 x_1 + A_1}$$

et, en remplaçant  $x_1$  par sa valeur,

$$J = -\frac{2}{9} X + \frac{B_2}{A_0} - \frac{2}{9} \frac{A_1^2}{A_0} + \frac{B_3 + \frac{2}{9} \frac{A_1^3}{A_0} - \frac{A_1 B_2}{A_0}}{\sqrt{A_1^2 - 2A_0 X}}.$$

Changeant  $X$  en  $X + \frac{A_1^2}{2A_0}$ , l'expression de l'invariant est

$$-\frac{2}{9} X + \frac{B_2 - \frac{1}{3} A_1^2}{A_0} + \frac{\frac{2}{9} A_1^3 + A_0 B_3 - A_1 B_2}{A_0 \sqrt{-2A_0 X}}.$$

Le changement simultané de  $X$  en  $h_1^2 X_1$ , et de  $Y$  en  $h_1^2 Y_1$ , où  $h_1$  désigne une constante, laisse à l'équation la forme canonique. On pourra donc regarder l'invariant  $J_1$  relatif à une équation de Jacobi comme donné par

$$(1) \quad J_1 = -\frac{2}{9} X_1 + \frac{B_2 - \frac{1}{3} A_1^2}{h_1^2 A_0} + \frac{1}{A_0 \sqrt{-2A_0}} \frac{\frac{2}{9} A_1^3 + A_0 B_3 - A_1 B_2}{h_1^3 \sqrt{X_1}}.$$

Il est clair que,  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  désignant des constantes quelconques,

$$J = -\frac{2}{3}X + \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{X}}$$

correspond à une équation de Jacobi. C'est la forme qui a été trouvée dans le n° 2, pour les équations qu'on peut intégrer en les ramenant à d'autres dont l'équation canonique est homogène.

En comparant la valeur de  $J$ , trouvée pour ces équations, avec celle qui précède, on aura deux relations qui donneront lieu, par l'élimination de  $h_1$ , à l'équation

$$\frac{(3k+1)^2}{(9k+2)^2} + \frac{1}{3} \frac{(B_2 - \frac{1}{3}A_1^2)^2}{(\frac{2}{3}A_1^3 + A_0B_3 - A_1B_2)^2} = 0.$$

L'intégration de l'équation exige donc encore la résolution d'une équation du troisième degré.

#### Cas d'une racine double de l'équation caractéristique.

5. La forme sous laquelle se présente l'intégrale générale de l'équation de Jacobi devient illusoire quand l'équation caractéristique du troisième degré admet une racine double. La méthode de d'Alembert conduit à la forme nouvelle qui convient à ce cas particulier (1).

Soit  $P_1$  la fonction linéaire qui répond à la racine simple  $\lambda_1$  de l'équation caractéristique,  $P_2$  celle qui répond à la racine double  $\lambda_2$ . L'intégrale générale est

$$\frac{P_1}{P_2} = \text{const.} e^{(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{P_2'}{P_2}},$$

$P_2'$  désignant une fonction linéaire que l'on obtient en dérivant  $P_2$  par rapport à  $\lambda$ , et remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda_2$ .

Réciproquement, soient  $A, B, C$  trois fonctions linéaires de  $x$  et  $k$  une constante. L'équation

$$(1) \quad \frac{y-A}{y-B} = \text{const.} e^{\frac{y-C}{y-B}}$$

(1) SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, 3<sup>e</sup> édition, Chap. VII.

donne lieu, par l'élimination de la constante arbitraire, à une équation que l'on reconnaît aisément être une équation de Jacobi, dont l'équation caractéristique admet une racine double répondant à la solution linéaire  $y = B$ , et une racine simple répondant à la solution  $y = A$ . Faisons, en effet, le changement de fonction  $y - B = y_1$ , qui transforme une équation de Jacobi en une autre équation de Jacobi, et qui, en outre, n'altère pas les invariants I et H. L'équation (1) se transforme dans la suivante

$$\frac{y-a}{y} = \text{const.} e^{k \frac{y-b}{y}},$$

où  $a$  et  $b$  sont de nouvelles fonctions linéaires de  $x$ .

L'élimination de la constante conduit à l'équation différentielle

$$(2) \quad y' = \frac{(a' - kb')y^2 + kab'y}{(a - kb)y + kab}.$$

En posant  $a = a_1x + a_0$ ,  $b = b_1x + b_0$ , l'équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} & [(a_1 - kb_1)y + ka_1b_1x](x dy - y dx) \\ & + [(a_0 - kb_0)y + k(a_1b_0 + a_0b_1)x + ka_0b_0]dy - ka_0b_1y dx = 0, \end{aligned}$$

qui est bien une équation de Jacobi dont l'équation caractéristique admet la racine double  $\lambda_2 = -ka_0b_1$ , et la racine simple  $\lambda_1 = -ka_1b_0$ . La première donne la solution particulière  $y = 0$ ; la seconde, la solution particulière  $y = a$ .

Les invariants I et H de l'équation (2), où nous supposons maintenant que  $a$  et  $b$  sont des fonctions quelconques de  $x$ , sont

$$I = \frac{k(2a + kb)(ba' - ab')}{(a - kb)^2}, \quad H = \frac{k^2 a^2 b(ba' - ab')}{(a - kb)^3}.$$

On reconnaît aisément qu'ils ne dépendent que du rapport  $\frac{b}{a} = t$ . On a ainsi

$$-I = \frac{k(2 + kt)t'}{(1 - kt)^3}, \quad -H = \frac{k^2 tt'}{(1 - kt)^3}.$$

Toutes ces équations admettent une même équation canonique, que l'on forme facilement au moyen des expressions précédentes de I et H,

ou, plus simplement encore, si l'on effectue la substitution  $1 - kt = \frac{1}{g}$ , au moyen des valeurs suivantes :

$$-I = (3g - 1)g', \quad -H = g^2(g - 1)g'.$$

On retrouve ainsi, multipliées respectivement par  $-1$  et  $(-1)^2$ , les valeurs rencontrées dans le n° 2 pour les invariants des équations qui peuvent être ramenées à d'autres où le rapport  $\frac{H}{I}$  est une constante. D'ailleurs, en formant l'équation canonique, on obtient, pour l'expression de l'invariant absolu J,

$$J = -\frac{2}{9}X + \frac{2}{3} \pm \frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt{X}},$$

que l'on retrouve en faisant  $k = 0$  dans la valeur de J qui a été rencontrée dans le n° 2.

On a vu, dans le n° 4, que les invariants I et H d'une équation de Jacobi peuvent toujours se ramener à être des polynômes du premier et du troisième degré. Toutes les fois que l'équation caractéristique admet une racine double, le polynôme du troisième degré admet aussi une racine double, et réciproquement. On a effectivement, en se reportant aux notations du n° 3,

$$-H = \frac{1}{9}A_0^2x^3 + \frac{1}{3}A_0A_1x^2 + B_2x + B_3.$$

Le discriminant du second membre est

$$\frac{4}{9} \left[ \frac{1}{27}A_0^2B_2 - \frac{1}{9^2}A_0^2A_1^2 \right] [A_0A_1B_3 - B_2^2] - \left[ \frac{1}{9}A_0^2B_3 - \frac{1}{27}A_0A_1B_2 \right]^2.$$

En l'égalant à zéro et supprimant le facteur  $A_0^2$ , on a la condition

$$4(3B_2 - A_1^2)(A_0A_1B_3 - B_2^2) - (3A_0B_3 - A_1B_2)^2 = 0$$

qui exprime l'existence d'une racine double pour l'équation caractéristique

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + B_2\lambda - \frac{1}{3}A_0B_3 = 0.$$



**Cas d'une racine triple de l'équation caractéristique.**

6. L'intégration de l'équation de Jacobi peut être alors considérée comme immédiate, par suite de la forme particulière que l'on peut donner aux invariants I et H. En exprimant que l'équation caractéristique

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + B_2\lambda - \frac{1}{3}A_0B_3 = 0$$

a une racine triple, on a les conditions

$$B_2 = \frac{1}{3}A_1^2, \quad A_0B_3 = \frac{1}{9}A_1^3.$$

Si l'on ramène les invariants I et H à être des polynômes du premier et du troisième degré, on trouve donc

$$-I = A_0x + A_1, \quad -H = \frac{1}{9A_0}(A_0x + A_1)^2.$$

Les deux invariants satisfont à la relation

$$\left(\frac{H}{I}\right)' = -\frac{2}{3}I$$

qui fait voir que l'intégration se ramène à des quadratures.

En appliquant à ce nouveau cas particulier le procédé de d'Alembert, on trouve pour l'intégrale générale la forme suivante (1)

$$CP^2 - 2P + P'^2 = 0,$$

où C est la constante arbitraire, P la fonction linéaire qui répond à l'unique solution linéaire, et P' la dérivée de cette fonction par rapport à  $\lambda$ , où l'on remplace  $\lambda$  par la racine triple.

On voit que l'intégrale se compose de courbes du second degré. Pour une valeur convenable de la constante, on pourra généralement faire disparaître le terme en  $y^2$  de l'équation intégrale, et l'on obtiendra ainsi une solution particulière rationnelle. C'est cette der-

---

(1) SERRET, *loc. cit.*

nière solution qui s'introduit avec la fonction  $P$  quand on intègre directement l'équation de Jacobi sans avoir recours au procédé de d'Alembert. Considérons l'équation

$$y(y - \alpha)^\lambda = \text{const.},$$

$\lambda$  étant une constante et  $\alpha$  une fonction quelconque de  $x$ . L'élimination de la constante conduit à l'équation différentielle

$$y' = \frac{\lambda \alpha' y}{(\lambda + 1)y - \alpha},$$

que l'on ramène, conformément à la méthode générale, à la forme réduite

$$(1) \quad \frac{dY}{dx} + \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \alpha' = \frac{\lambda \alpha \alpha'}{(\lambda + 1)^2 Y}$$

par le changement de fonction

$$y = Y + \frac{\alpha}{\lambda + 1}.$$

Les deux invariants  $I$  et  $H$  satisfont, pour l'équation précédente, à la relation

$$\left(\frac{H}{I}\right)' = \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} I.$$

On peut, à cause de la fonction arbitraire  $\alpha$  et de la constante  $\lambda$ , regarder l'équation (1) comme l'équation réduite de toutes les équations de la forme qui nous occupe, pour lesquelles le rapport de  $\left(\frac{H}{I}\right)'$  à  $I$  est une constante quelconque.

Son intégrale générale s'obtient en remplaçant  $y$  par sa valeur en  $Y$  dans  $y(y - \alpha)^\lambda = \text{const.}$ , ce qui donne

$$[(\lambda + 1)Y + \alpha][(\lambda + 1)Y - \lambda\alpha]^\lambda = \text{const.}$$

Si nous appliquons la remarque précédente à l'équation

$$(2) \quad \frac{dY}{dx_1} = A_0 x_1 + A_1 - \frac{1}{9A_0} \frac{(A_0 x_1 + A_1)^3}{Y},$$

on trouvera d'abord la constante  $\lambda$  en résolvant l'équation du second degré

$$\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} = -\frac{2}{9}$$

dont les racines sont  $-2$  et  $-\frac{1}{2}$ . Prenons par exemple  $\lambda = -2$ .

On détermine  $a$  par l'équation

$$-3a' = -A_0x_1 - A_1,$$

d'où

$$a = \frac{1}{6} A_0 x_1^2 + \frac{1}{3} A_1 x_1 + \frac{1}{6} \frac{A_1^2}{A_0},$$

en déterminant la constante d'intégration de façon que

$$2aa' = \frac{1}{9A_0} (A_0x_1 + A_1)^3.$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est donc

$$\left[ -Y + \frac{1}{6} A_0 x_1^2 + \frac{1}{3} A_1 x_1 + \frac{1}{6} \frac{A_1^2}{A_0} \right] \left[ -Y + \frac{1}{3} A_0 x_1^2 + \frac{2}{3} A_1 x_1 + \frac{1}{3} \frac{A_1^2}{A_0} \right]^{-2} = \text{const.}$$

Le changement de variable  $x_1 = \frac{1}{x}$  donne

$$\left[ -Y + \frac{1}{6} A_0 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} A_1 \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \frac{A_1^2}{A_0} \right] \left[ -Y + \frac{1}{3} A_0 \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3} A_1 \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{A_1^2}{A_0} \right]^{-2} = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation

$$(3) \quad \frac{dY}{dx} + \frac{A_1 x + A_0}{x^3} = \frac{1}{9A_0} \frac{(A_1 x + A_0)^3}{x^5 Y}.$$

Nous savons que l'équation (3) peut être considérée comme provenant d'une infinité d'équations de Jacobi. Choisissons la plus simple qui répond (n° 3) aux hypothèses

$$h = 1, \quad q_1 = 0, \quad n_1 = 0;$$

d'où l'on conclut

$$q = \frac{A_0}{3}, \quad n = -A_1, \quad p_1 = \frac{1}{9} \frac{A_1^3}{A_0}, \quad p = \frac{A_1^2}{3}.$$

On obtient ainsi l'équation

$$(4) \quad y_1(x dy_1 - y_1 dx) + \frac{1}{3} A_0 dy_1 + \left( A_1 y_1 - \frac{1}{9} \frac{A_1^3}{A_0} x - \frac{1}{3} A_1^2 \right) dx = 0,$$

dont l'équation caractéristique admet la racine triple  $\frac{A_1}{3}$ . On passe de cette équation à l'équation réduite (3) par le changement de fonction

$$y_1 = xY - \frac{1}{3} \frac{A_0}{x}.$$

L'intégrale générale de l'équation (4) est donc

$$(5) \quad \left[ y_1 - \frac{2}{3} A_1 - \frac{1}{3} \frac{A_1^2}{A_0} x \right]^2 = \text{const.} \left[ x y_1 + \frac{1}{6} A_0 - \frac{1}{3} A_1 x - \frac{1}{6} \frac{A_1^2}{A_0} x^2 \right].$$

On constate immédiatement : 1° que le premier facteur égalé à zéro donne pour  $y_1$  la solution linéaire qui répond à la racine triple; 2° que le second facteur égalé à zéro fournit également une solution particulière; 3° qu'on est conduit au même résultat en prenant pour  $\lambda$  l'autre racine  $-\frac{1}{2}$  de l'équation du second degré.

Si l'on veut avoir l'intégrale générale d'une équation donnée de Jacobi dans le cas d'une racine triple, on déduira cette intégrale de la précédente par un changement convenable de la fonction et de la variable indépendante. On mettra l'équation sous la forme

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + (n_1 x + n)y + p_1 x + p}{xy + n_1 x^2 + q_1 x + q}.$$

Cette équation se ramène à la forme réduite (3) par le changement de fonction

$$y = xY - \frac{n_1 x^2 + q_1 x + q}{x},$$

en faisant égale à l'unité la constante désignée par  $h$  dans le n° 3. Les deux relations qui définissent  $y_1$  et  $y$  en fonction de  $Y$  donnent, par l'élimination de  $Y$ ,

$$y_1 = y + n_1 x + q_1.$$

Telle est la substitution qui permettra de passer de l'équation (4)

à l'équation (6) et, par suite, de l'intégrale générale (5) à celle que l'on cherche.

7. Proposons-nous de chercher quelles sont les équations de la forme qui nous occupe, dont l'intégrale générale s'obtient en élevant à des puissances convenables les facteurs qui correspondent à trois solutions particulières, et en égalant le produit à une constante.

En désignant par  $a, b, c, A, B, C$  des fonctions quelconques de  $x$ , et par  $\alpha, \beta, \gamma$  des constantes, l'intégrale aura la forme

$$(ay - A)^{\alpha}(by - B)^{\beta}(cy - C)^{\gamma} = \text{const.}$$

En divisant par  $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ , l'équation équivaut à celle-ci

$$(y - A)^{\alpha}(y - B)^{\beta}(y - C)^{\gamma} = D \times \text{const.},$$

$A, B, C, D$  étant quatre fonctions quelconques de  $x$ . L'équation différentielle résultant de l'élimination de la constante est

$$\alpha \frac{y' - A'}{y - A} + \beta \frac{y' - B'}{y - B} + \gamma \frac{y' - C'}{y - C} - \frac{D'}{D} = 0.$$

On obtient de deux façons une équation où  $y'$  est le quotient d'un polynôme du second degré en  $y$  par un polynôme du premier degré.

1° En exprimant que le coefficient de  $y^2 y'$  est nul, ainsi que celui de  $y^3$ , ce qui donne les conditions

$$D = \text{const.}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0;$$

2° En exprimant que le coefficient du terme en  $y'$  est nul, ainsi que celui du terme indépendant de  $y$  et  $y'$ , ce qui permettra la suppression du facteur  $y$ . On obtiendra ainsi les deux conditions

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0, \quad \frac{D'}{D} = \alpha \frac{A'}{A} + \beta \frac{B'}{B} + \gamma \frac{C'}{C},$$

ou, en intégrant la seconde,

$$D = \text{const. } A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}.$$

La première forme ne donne que les équations provenant de l'équation de Jacobi par un changement de la variable indépendante; la se-

conde, dont nous nous occuperons un peu plus loin, appartient à une classe d'équations différentielles plus générales que l'équation de Jacobi.

Si l'on veut trouver les invariants I et H de l'équation différentielle provenant de

$$(y - A)^{\alpha}(y - B)^{\beta}(y - C)^{\gamma} = \text{const.}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

on sait qu'on peut, sans les altérer, poser  $y - C = y_1$ , ce qui ne laisse dans les équations que les deux fonctions arbitraires  $A - C$  et  $B - C$ . Si l'on pose ensuite  $y_1 = (A - C)y_2$ , l'équation prend la forme

$$(y_2 - 1)^{\alpha} \left( y_2 - \frac{B - C}{A - C} \right)^{\beta} y_2^{\gamma} = \text{const.},$$

où n'entre plus qu'une fonction arbitraire. On pourra donc se borner à chercher les deux invariants de l'équation provenant de

$$(y - 1)(y - t)^{\lambda} y^{-\lambda-1} = \text{const.},$$

où  $t$  est une fonction quelconque de  $x$  et  $\lambda$  une constante. On trouve

$$-I = \frac{\lambda(\lambda + 2)t - (2\lambda + 1)}{(1 + \lambda t)^2} t', \quad -H = \frac{\lambda(\lambda + 1)t(1 - t)t'}{(1 + \lambda t)^3}.$$

On peut, en partant de ces expressions, ramener l'équation à la forme canonique. On rendra les calculs un peu plus simples en posant

$$\frac{1 - \lambda t}{1 + \lambda t} = \frac{\theta}{\lambda + 1},$$

ce qui donne

$$-I = (3\theta + \lambda - 1)\theta', \quad -H = (\theta + \lambda - 1)(\theta + \lambda + 1)(\theta - \lambda - 1)\theta'.$$

La formation de l'équation canonique est facile. On obtient ainsi

$$J = \frac{2}{3} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{h^2} - \frac{2}{9} X + \frac{2}{9} \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 2)(2\lambda + 1)}{h^2 \sqrt{X}},$$

où  $h$  désigne une constante arbitraire. On voit que les équations en question sont des équations de Jacobi.

La comparaison de cette expression de  $J$  avec celle qui a été trouvée

dans le n° 4, formule (1), nous conduit à une relation algébrique intéressante; on obtient les deux équations

$$\frac{2}{3} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{h^2} = \frac{B_2 - \frac{1}{3} A_1^2}{h_1^2 A_0}, \quad \frac{2}{9} \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 2)(2\lambda + 1)}{h^3} = \frac{\frac{2}{9} A_1^3 + A_0 B_3 - A_1 B_2}{h_1^3 A_0 \sqrt{-2 A_0}}.$$

On élimine le rapport arbitraire  $\frac{h}{h_1}$  en divisant membre à membre le cube de la première relation par le carré de la seconde, ce qui fournit l'équation

$$\frac{(\lambda^2 + \lambda + 1)^3}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)^2(2\lambda + 1)^2} = \frac{1}{3} \frac{(\frac{1}{3} A_1^3 - B_2)^3}{(\frac{2}{9} A_1^3 + A_0 B_3 - A_1 B_2)^2}.$$

Nous obtenons ainsi l'équation qui donne les quotients des différences des racines de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 - A_1 \lambda^2 + B_2 \lambda - \frac{A_0 B_3}{3} = 0,$$

dont dépend l'intégration de l'équation de Jacobi. Pour le vérifier, en évitant des calculs longs et inutiles, remarquons que, si l'on change le signe de l'un des quotients, on obtient, en appelant  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les racines de l'équation du troisième degré, l'expression  $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}$ , qui peut être considérée comme le rapport anharmonique des quatre racines  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty$  d'une équation du quatrième degré dans laquelle le coefficient du premier terme se réduit à zéro. On sait que le rapport anharmonique  $\alpha$  des quatre racines d'une équation du quatrième degré est donné par l'équation du sixième degré

$$\frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2(2 - \alpha)^2(1 - 2\alpha)^2} = \frac{1}{24} \frac{i^3}{j^2},$$

où  $i$  et  $j$  sont les deux invariants de la forme biquadratique correspondante

$$a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$

$$i = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2),$$

$$j = 6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

En faisant

$$4a_1 = 1, \quad 6a_2 = -A_1, \quad 4a_3 = B_2, \quad 3a_4 = -A_0B_3,$$

on trouve

$$i = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}A_1^2 - B_2),$$

$$j = \frac{1}{3}(A_0B_3 - A_1B_2 + \frac{2}{9}A_1^3).$$

Si l'on remplace  $i$  et  $j$  par ces valeurs, et  $\alpha$  par  $-\lambda$ , on retombe sur l'équation trouvée précédemment.

8. Si, au lieu de trois fonctions de  $x$ , on introduit quatre fonctions  $A, B, C, D$ , et si l'on désigne par  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  quatre constantes, l'équation

$$(1) \quad (y-A)^\alpha (y-B)^\beta (y-C)^\gamma (y-D)^\delta = \text{const.}$$

donne naissance à une équation différentielle où  $y'$  est le quotient d'un polynôme du second degré en  $y$  par un polynôme du premier degré, sous les conditions

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0.$$

Si l'on fait le changement de fonction

$$y = (A-D)y_1 + D,$$

l'équation ne dépend plus que des deux rapports  $\frac{B-D}{A-D}, \frac{C-D}{A-D}$ , liés par la relation

$$\alpha + \beta \frac{B-D}{A-D} + \gamma \frac{C-D}{A-D} = 0,$$

c'est-à-dire d'une seule fonction de  $x$ . Les invariants  $I$  et  $H$  étant indépendants du changement de fonction qui a été fait, on peut se borner à les calculer en partant de l'équation

$$(y-1)^k (y-t)^h (y+k+ht)y^{-k-h-1} = \text{const.},$$

où  $k$  et  $h$  sont des constantes et  $t$  une fonction quelconque de  $x$ . On obtient ainsi une classe d'équations différentielles qui se déduisent les unes des autres par un changement de la variable indépendante. On



peut les définir en les ramenant à la forme canonique. Mais nous allons chercher à former celles de ces équations dont quatre solutions particulières sont des fonctions linéaires, ce qui nous donnera une généralisation de l'équation de Jacobi.

En éliminant la constante de l'équation (1), on obtient l'équation

$$y' = \frac{P.y^2 + Q.y + R}{S.y + T},$$

en posant

$$\begin{aligned} P &= -\Sigma \alpha (B + C + D) A', \\ Q &= -\Sigma \alpha (BC + BD + CD) A', \\ R &= -\Sigma \alpha BCDA', \\ S &= \Sigma \alpha (BC + BD + CD), \\ T &= -\Sigma \alpha BCD, \end{aligned}$$

où le signe  $\Sigma$  se rapporte à quatre termes se déduisant, par permutation, du premier qui est seul écrit. Les expressions de ces coefficients donnent lieu aux remarques suivantes :

A, B, C, D étant supposées des fonctions linéaires de  $x$ , S est un polynôme du second degré, et P en est la demi-dérivée.

Complétons, en effet, les parenthèses qui figurent dans S, de façon à y introduire la somme des produits deux à deux des quantités A, B, C, D. Le résultat obtenu est nul, en vertu de la relation  $\Sigma \alpha = 0$ . On a donc

$$S = -\Sigma \alpha A (B + C + D).$$

Si l'on introduit la somme  $A + B + C + D$  dans tous ces termes, en tenant compte de la relation  $\Sigma \alpha A = 0$ , on voit que

$$S = \Sigma \alpha A^2.$$

On voit de la même façon que

$$P = \Sigma \alpha AA' \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} S'.$$

Q est un polynôme du second degré, T un polynôme du troisième degré dont les premiers coefficients sont les mêmes; car, si l'on désigne par  $a, b, \dots$  le coefficient de  $x$  dans A, B, ..., le premier terme de Q a pour coefficient

$$\Sigma \alpha (abc + abd + acd),$$

qui est égal, d'après la relation  $\Sigma \alpha = 0$ , à

$$-\Sigma \alpha bcd,$$

c'est-à-dire au coefficient de  $x^3$  dans T.

Enfin R est un polynôme du second degré, le coefficient de  $x^2$  étant nul d'après la relation  $\Sigma \alpha = 0$ .

Il en résulte que l'équation différentielle aura la forme

$$(2) \quad y' = \frac{(mx - m_1)y^2 + (n_2x^2 + n_1x + n)y + p_2x^2 + p_1x + p}{(mx^2 - 2m_1x + m_2)y + n_2x^2 + q_2x^2 + q_1x + q};$$

mais les constantes  $m, m_1, m_2, n, n_1, n_2, p, p_1, p_2, q, q_1, q_2$  doivent satisfaire à d'autres conditions qu'il serait moins facile de trouver par la comparaison des deux équations différentielles.

On aura de nouvelles relations en exprimant que l'équation (2) admet des intégrales particulières linéaires. Exprimons que  $y = ax + b$  est une solution. On obtient les relations

$$\begin{aligned} -m_1a^2 - mab + (q_2 - n_1)a - n_2b - p_2 &= 0, \\ m_2a^2 - mb^2 + (q_1 - n)a - n_1b - p_1 &= 0, \\ m_2ab + m_1b^2 + qa - nb - p &= 0. \end{aligned}$$

En regardant  $a$  et  $b$  comme les coordonnées d'un point, ces trois équations représentent trois coniques qui n'ont pas, en général, de point commun. L'équation différentielle admettra quatre solutions linéaires si l'on exprime que les trois coniques ont quatre points communs, c'est-à-dire, comme on le vérifie facilement, si

$$(3) \quad \begin{cases} pm + p_1m_1 + p_2m_2 = 0, \\ nm + n_1m_1 + n_2m_2 = 0, \\ qm + q_1m_1 + q_2m_2 = nm_1 + n_1m_2. \end{cases}$$

Les conditions (3) sont nécessaires. Pour établir qu'elles sont suffisantes, remarquons que l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$-Ldy + Mdx + N(xy - ydx) = 0,$$

où l'on a

$$\begin{aligned} L &= 2m_1xy - m_2y - q_2x^2 - q_1x - q, \\ M &= m_1y^2 - n_1xy - p_2x^2 - p_1x - ny - p, \\ N &= n_2x^2 + mxy. \end{aligned}$$

Elle appartient donc à une classe d'équations, pour lesquelles M. Darboux <sup>(1)</sup> a montré qu'on peut former l'intégrale générale quand on connaît un nombre suffisant d'intégrales particulières algébriques. Les polynômes L, M, N étant du second degré, il semble qu'il soit nécessaire d'avoir cinq intégrales particulières; mais on reconnaît facilement que, dans le cas actuel, les quatre solutions linéaires dont on a exprimé l'existence suffisent pour obtenir l'intégrale générale.

Si l'on désigne, en effet, par  $Px + Qy + Rz$  la fonction linéaire homogène qui, égalée à zéro, donne une des quatre intégrales linéaires, on sait que, pour des valeurs convenables des constantes  $\lambda, \mu, \nu$ , on doit avoir l'identité

$$(4) \quad LP + MQ + NR = (Px + Qy + Rz)(\lambda x + \mu y + \nu z),$$

où les polynômes L, M, N ont été rendus homogènes.

Si l'on identifie les coefficients de  $y^2$ , on trouve la relation  $\mu = m_1$ . La méthode de M. Darboux consiste, en élevant les facteurs

$$P_1x + Q_1y + R_1z, \dots,$$

qui répondent aux intégrales particulières, à des puissances convenables  $\rho_1, \dots$ , à former une fonction  $u$  homogène et de degré zéro qui satisfasse identiquement à

$$L \frac{\partial u}{\partial x} + M \frac{\partial u}{\partial y} + N \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On sait que les exposants  $\rho_1, \rho_2, \dots$  doivent satisfaire à la condition  $\Sigma \rho = 0$  et annuler identiquement

$$\Sigma \rho (\lambda x + \mu y + \nu z),$$

en sorte que les quatre valeurs de  $\rho$  devraient satisfaire à quatre équations linéaires et homogènes, ce qui ne permettrait pas de déterminer leurs rapports; mais nous avons remarqué que, pour les quatre solutions linéaires, la constante  $\mu$  a une valeur unique  $m_1$ . La condition qui exprime que le coefficient de  $y$  est nul dans la somme

$$\Sigma \rho (\lambda x + \mu y + \nu z)$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI.

se confond ainsi avec la relation  $\Sigma \rho = 0$ , et l'on n'a que trois équations homogènes et linéaires qui déterminent les rapports des quatre exposants  $\rho$ .

En résumé, pour avoir l'intégrale générale, on calculera les coefficients des solutions linéaires  $y = ax + b$ . La constante  $a$  satisfait à une équation du quatrième degré, que l'on peut former en fonction des coefficients de l'équation donnée. La constante  $b$  est alors connue par une équation du premier degré. Soient  $a_1, b_1, \dots, a_4, b_4$  les quatre systèmes de solutions. Il faut déterminer les exposants  $\rho_1, \dots, \rho_4$ .

Si, dans les deux membres de l'identité (4), on égale les coefficients de  $xy$  et de  $yz$ , on obtient

$$P m_1 - Q(n_1 + \lambda) + R m = 0,$$

$$P m_2 + Q(n + \nu) + R m_1 = 0.$$

En remplaçant  $\frac{P}{Q}$  par  $-a$  et  $\frac{R}{Q}$  par  $-b$ , on aura

$$\lambda = -n_1 - m_1 a - m b,$$

$$\nu = -n + m_2 a + m_1 b.$$

Les relations qui expriment que  $\Sigma \rho(\lambda x + \mu y + \nu z)$  est nulle identiquement se réduisent donc à

$$\Sigma \rho = 0, \quad m_1 \Sigma \rho a + m \Sigma \rho b = 0, \quad m_2 \Sigma \rho a + m_1 \Sigma \rho b = 0.$$

Supposons que  $m_1^2 - m m_2$  soit différent de zéro, les trois équations homogènes qui déterminent les rapports des quatre exposants  $\rho$  sont alors

$$\Sigma \rho = 0, \quad \Sigma \rho a = 0, \quad \Sigma \rho b = 0.$$

Lorsque  $m_1^2 - m m_2 = 0$ , les trois coniques ont une direction asymptotique commune et ne se coupent plus qu'en trois points, à distance finie. L'équation différentielle n'admet alors que trois intégrales particulières linéaires. On vérifie sans difficulté, en ayant égard aux relations (3), que tous les coefficients de l'équation différentielle sont divisibles par  $m x - m_1$ , et qu'on tombe ainsi sur une équation ordinaire de Jacobi.

Les équations que nous avons rencontrées dans le n° 7,

$$(y - A)^\alpha (y - B)^\beta (y - C)^\gamma = \text{const. } A^\alpha B^\beta C^\gamma,$$

avec la condition

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0,$$

rentrent dans celles que nous venons d'étudier. En posant

$$A = \frac{1}{A_1}, \quad B = \frac{1}{B_1}, \quad C = \frac{1}{C_1}, \quad y = \frac{1}{y_1},$$

on obtient

$$\left(\frac{A_1}{y_1} - 1\right)^\alpha \left(\frac{B_1}{y_1} - 1\right)^\beta \left(\frac{C_1}{y_1} - 1\right)^\gamma = \text{const.},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(A_1 - y_1)^\alpha (B_1 - y_1)^\beta (C_1 - y_1)^\gamma y_1^\delta = \text{const.},$$

avec les conditions

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = 0.$$

Si l'on suppose que  $A_1, B_1, C_1$  sont des fonctions linéaires de  $x$ , l'équation différentielle résultant de l'élimination de la constante est un cas particulier de l'équation de Jacobi généralisée. Elle admet la solution particulière  $y = 0$ . Les trois constantes  $p, p_1, p_2$  sont nulles, et les trois coniques dont les points communs fournissent les solutions linéaires passent toutes par l'origine des coordonnées.

9. On peut intégrer quelques équations de la forme que nous étudions par la remarque suivante, qui n'est qu'une modification d'une transformation indiquée par M. Appell (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 377; 1889). Considérons l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ay^2 + by + c}{Ay + B},$$

où  $a, b, c$  sont des constantes,  $A$  et  $B$  des polynômes en  $x$  dont le degré est au plus égal à 2. Cette équation est intégrable, puisque, si l'on con-

sidère  $x$  comme la fonction, elle est une équation de Riccati. L'intégration se ramène à des quadratures, lorsque A et B sont du premier degré.

Les deux invariants de l'équation (1) sont

$$(2) \quad I = \frac{2\alpha B - bA + BA' - AB'}{A^2 e^{\int \frac{a}{A} dx}}, \quad H = \frac{\alpha B^2 - bAB + cA^2}{A^3 e^{2 \int \frac{a}{A} dx}}.$$

Ils se réduisent, pour  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ , à  $-\left(\frac{B}{A}\right)'$  et  $\frac{1}{A}$  et donnent ainsi le cas d'intégrabilité qu'a signalé M. Appell.

Supposons que les polynômes A et B soient du premier degré et mettons en évidence leurs coefficients

$$A = a_1 x + a_0, \quad B = b_1 x + b_0;$$

l'exponentielle  $e^{\int \frac{a}{A} dx}$  devient  $(a_1 x + a_0)^{\frac{a}{a_1}}$ . Posons  $\frac{a}{a_1} = \alpha$ . Supposons  $a_0 = 0$ ,  $a_1$  différent de zéro, et multiplions I par  $a_1^{2\alpha+1}$ , H par  $a_1^{2\alpha+2}$ , ce qui revient, comme on sait, à multiplier la fonction par une constante; on aura

$$I = \frac{(2\alpha b_1 - b)x + (2\alpha + 1)b_0}{x^{2\alpha+2}}, \quad H = \frac{\alpha(b_1 x + b_0)^2 - b x(b_1 x + b_0) + c a_1 x^2}{x^{2\alpha+3}}.$$

Cherchons à identifier ces expressions avec les suivantes

$$I = \frac{A_1 x + A_0}{x^{2\alpha+2}}, \quad H = \frac{B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{x^{2\alpha+3}},$$

où  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  sont des constantes quelconques. On obtient ainsi cinq équations contenant les cinq indéterminées  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ ,  $b$ ,  $c$ ; mais on reconnaît aisément que le système est, en général, impossible et que les coefficients doivent satisfaire aux deux relations

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha A_0^2 = (2\alpha + 1)^2 B_0, \\ A_0 A_1 = (2\alpha + 1) B_1. \end{cases}$$

Si on les suppose vérifiées, l'identification peut être faite d'une infi-

nité de façons, les cinq indéterminées devant satisfaire aux trois relations

$$b_0 = \frac{A_0}{2\alpha + 1}, \quad b = 2\alpha b_1 - A_1, \quad ca_1 = B_2 + \alpha b_1^2 - b_1 A_1.$$

On pourra prendre, par exemple,

$$b_0 = \frac{A_0}{2\alpha + 1}, \quad b_1 = 0, \quad b = -A_1, \quad a_1 = 1, \quad c = B_2;$$

on ramène ainsi à l'équation linéaire

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha y^2 - A_1 y + B_2}{xy + \frac{A_0}{2\alpha + 1}}.$$

l'équation

$$(5) \quad \frac{dY}{dx} + \frac{A_1 x + A_0}{x^{\alpha+2}} = \frac{B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{x^{2\alpha+3} Y},$$

avec les conditions (3), au moyen de la substitution

$$y = x^\alpha Y - \frac{A_0}{(2\alpha + 1)x}.$$

L'équation en Y admet deux intégrales particulières d'une forme simple répondant aux deux solutions données par l'équation

$$\alpha y^2 - A_1 y + B_2 = 0,$$

qui sont évidentes pour l'équation (4).

Ces équations comprennent comme cas particulier, pour  $\alpha = 1$ , l'équation de Jacobi. Faisons dans l'équation (5), avec  $\alpha = 1$ ,  $x = \frac{1}{x_1}$ ; elle devient

$$\frac{dY}{dx_1} = A_0 x_1 + A_1 - \frac{(B_0 x_1^2 + B_1 x_1 + B_2) x_1}{Y}.$$

Les relations (3) deviennent

$$(6) \quad \begin{cases} A_0^2 = 9B_0, \\ A_0 A_1 = 3B_1. \end{cases}$$

On obtient donc (n° 4) l'équation provenant de la réduction d'une équation de Jacobi avec l'hypothèse particulière  $B_2 = 0$ . On revient au

cas général par un changement linéaire de la variable indépendante. Appelons, en effet,  $\alpha_0$  la racine de l'équation  $A_0x_1 + A_1 = 0$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les racines de  $B_0x_1^2 + B_1x_1 + B_2 = 0$ , et, désignant par  $\alpha_3$  une constante quelconque, faisons le changement de variable  $x_1 = x'_1 - \alpha_3$ . Le polynôme  $A_0x_1 + A_1$  se transforme en  $A'_0x'_1 + A'_1$ , le polynôme  $(B_0x_1^2 + B_1x_1 + B_2)x_1$  en un polynôme complet du troisième degré  $B'_0x'^3_1 + B'_1x'^2_1 + B'_2x'_1 + B'_3$ . On a évidemment  $A'_0 = A_0$ ,  $B'_0 = B_0$ , en sorte que les nouveaux coefficients vérifient la première des relations (6)

$$A'^2_0 = 9B'_0.$$

Remplaçons la seconde des relations (6) par celle que l'on obtient en les divisant membre à membre

$$3 \frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0}.$$

Elle se traduit par la relation suivante entre les racines

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3\alpha_0,$$

qui peut s'écrire

$$\alpha_3 + (\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_3) = 3(\alpha_0 + \alpha_3),$$

c'est-à-dire

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 = 3\alpha'_0.$$

Elle revient ainsi à la relation

$$\frac{B'_1}{B'_0} = 3 \frac{A'_1}{A'_0}.$$

Les nouveaux coefficients vérifient donc bien les deux relations qui caractérisent l'équation de Jacobi.

Le cas où  $2\alpha + 1 = 0$  donne, pour  $b_0$ , une valeur impossible. Il est facile de le traiter directement; mais il ne présente rien d'intéressant.

Reprenons les valeurs (2) et supposons  $a = 0$ , le polynôme A se réduisant à une constante  $a_0$ . En multipliant I par  $a_0$  et H par  $a_0^2$ , on voit qu'on ramène à une équation de Riccati l'équation dont les invariants sont

$$I = -B' - b, \quad H = -bB + ca_0$$



Mettant en évidence les coefficients de  $B = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ , si l'on cherche à identifier avec les expressions suivantes

$$I = A_1 x + A_0, \quad H = B_2 x^2 + B_1 x + B_0,$$

où  $A_1, A_0, B_2, B_1, B_0$  sont des constantes quelconques, on vérifie aisément que les coefficients doivent vérifier la relation

$$(7) \quad 2A_1 A_0 B_2 - B_1 A_1^2 + 4B_2^2 = 0,$$

et que l'identification peut se faire alors d'une infinité de façons en posant

$$b = \frac{2B_2}{A_1}, \quad b_1 = -\frac{A_1 B_1}{2B_2}, \quad b_2 = -\frac{1}{2}A_1, \quad ca_0 A_1 - 2b_0 B_2 = B_0 A_1;$$

on peut supposer, par exemple,

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad c = B_0, \quad b = \frac{2B_2}{A_1}, \quad b_1 = -\frac{A_1 B_1}{2B_2}, \quad b_2 = -\frac{1}{2}A_1.$$

L'équation

$$(8) \quad \frac{dY}{dx} + A_1 x + A_0 = \frac{B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{Y},$$

où les coefficients vérifient la relation (7), se réduit ainsi à l'équation de Riccati

$$\frac{dY}{dx} = \frac{2\frac{B_2}{A_1}Y + B_0}{Y - \frac{1}{2}A_1 x^2 - \frac{A_1 B_1}{2B_2}x}$$

par la substitution

$$Y = Y + \frac{1}{2}A_1 x^2 + \frac{A_1 B_1}{2B_2}x.$$

A cause de la relation (7), l'équation (8) admet comme intégrale particulière un polynôme du second degré

$$Y = -\frac{1}{2}A_1 x^2 - \frac{A_1 A_0 + 2B_2}{A_1}x - \frac{A_1 B_0}{2B_2};$$

mais cette intégrale répond à la solution particulière  $Y = -\frac{A_1 B_0}{2B_2}$  de l'équation de Riccati, et ne peut servir pour en ramener l'intégration à des quadratures.

La relation (7) est vérifiée pour  $B_1 = B_2 = 0$ . Les deux invariants se réduisent à

$$I = A_1 x + A_0, \quad H = B_0.$$

On tombe ainsi sur un cas d'intégrabilité qui est connu.

Revenons encore aux expressions (2) des invariants, en supposant que le polynôme A se réduit à  $a_1 x$ , et que la constante  $a$  est nulle. Le polynôme B étant du second degré et égal à  $b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ , les invariants seront

$$I = \frac{-b_2 x^2 - b_1 x + b_0}{x^2}, \quad H = \frac{-bb_2 x^2 + (ca_1 - bb_1)x - bb_0}{x^2}.$$

Si l'on cherche à les identifier avec les expressions

$$I = \frac{A_2 x^2 + A_1 x + A_0}{x^2}, \quad H = \frac{B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{x^2},$$

on trouve que les coefficients doivent vérifier les deux relations

$$(9) \quad A_1 A_0 - B_0 = 0, \quad A_1 A_2 + B_2 = 0.$$

On pourra faire alors l'identification d'une infinité de manières, en prenant

$$b = -A_1, \quad b_0 = A_0, \quad b_2 = -A_2, \quad ca_1 + b_1 A_1 = B_1.$$

Les relations (9) sont vérifiées en particulier si l'on prend

$$A_1 = B_2 = B_0 = 0.$$

On saura donc intégrer, en la ramenant à une équation de Riccati, l'équation

$$\frac{dY}{dx} + A_2 + \frac{A_0}{x^2} = \frac{B_1}{xY}$$

ou, en faisant le changement de variable  $x = e^{x_1}$ , l'équation

$$\frac{dY}{dx_1} + A_2 e^{x_1} + A_0 e^{-x_1} = \frac{B_1}{Y},$$

où les constantes  $A_0, A_2, B_1$  sont quelconques.

On réduit le polynôme  $B$  au premier degré en supposant  $b_2 = 0$  et, par suite,  $A_2 = 0$ . La seconde relation (9) donne alors  $B_2 = 0$ . On intégrera donc, au moyen de quadratures, les équations où les invariants ont la forme

$$I = \frac{A_1 x + A_0}{x^2}, \quad H = \frac{B_1 x + A_1 A_0}{x^2}$$

ou, si l'on effectue un changement de la variable indépendante, les équations où l'on aura

$$I = A_1 \frac{\varphi'}{\varphi} + A_0 \frac{\varphi'}{\varphi^2}, \quad H = B_1 \frac{\varphi'}{\varphi} + A_1 A_0 \frac{\varphi'}{\varphi^2},$$

$A_1$ ,  $A_0$ ,  $B_1$  étant des constantes quelconques et  $\varphi$  une fonction de  $x$ .



---

# NOTE

CONCERNANT

## L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. S. ZAREMBA.

---

1. Je me propose de faire voir dans cette Note que la détermination de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \varphi_1(x+y) \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \varphi_2(x+y)z = 0,$$

$\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant deux fonctions quelconques de  $x+y$ , peut être ramenée à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire, linéaire, du second ordre et à des quadratures; j'appliquerai ensuite les résultats obtenus à un problème élégant indiqué par M. Darboux dans le cours de l'une de ses Leçons professées à la Sorbonne.

2. Regardons  $x$  et  $y$  comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans le plan et soit (C) une courbe en chaque point de laquelle la valeur de  $z$  et celle de l'une de ses dérivées premières est donnée; désignons, en outre, par  $u(x, y, x_0, y_0)$  une fonction convenablement déterminée de  $x, y, x_0, y_0$ , mais indépendante, tant de la forme de la courbe (C) que des valeurs de  $z$  et de ses dérivées sur cette courbe. On aura alors, pour la valeur de  $z$  en un point quelconque,  $x_0, y_0$ , l'expression suivante en fonction des données, due à Riemann (*Werke*, p. 161), et que j'écris sous la forme qui lui a été donnée par

M. Darboux (*Cours de Géométrie*, t. II, p. 78)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} z(x_0, y_0) &= \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} \\ &- \int_C^B \left\{ \left[ \varphi_1 uz + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx - \left[ \varphi_1 uz + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dy \right\}, \end{aligned} \right.$$

où l'intégration doit être effectuée suivant la portion de la courbe (C), interceptée par les droites  $x = x_0$  et  $y = y_0$ .

Voici comment on peut déduire de l'équation (2) la valeur de  $u$ , en tirant parti de ce que cette relation doit avoir lieu, quelle que soit la courbe (C), pour une intégrale quelconque de l'équation (1). Introduisons dans la formule considérée de nouvelles variables, définies par les équations

$$2x = \xi + \eta, \quad 2y = \xi - \eta, \quad 2x_0 = \xi_0 + \eta_0, \quad 2y_0 = \xi_0 - \eta_0;$$

réduisons la courbe (C) à la droite  $\xi = \text{const.}$ , et prenons pour  $z$  une intégrale particulière de l'équation (1) de la forme

$$z = \Phi(\eta_0) \psi(\xi_0),$$

où l'on peut poser, comme on s'en assure sans aucune peine,

$$\Phi = \cos \mu(\eta_0 - \eta), \quad \psi = C_1 \psi_1(\xi_0) + C_2 \psi_2(\xi_0).$$

les lettres  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $C_1$  et  $C_2$  désignant ici des constantes arbitraires;  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , un système de solutions fondamentales de l'équation différentielle

$$(2) \quad \psi'' + 2\varphi_1(\xi_0) \psi' + [\varphi_2(\xi_0) + \mu^2] \psi = 0.$$

L'équation (2) devient, en faisant  $C_1 = \psi_2(\xi)$  et  $C_2 = -\psi_1(\xi)$ , et en remarquant que  $z$  et  $\frac{\partial z}{\partial \eta_0}$  seront nuls alors sur la droite  $\xi = \text{const.}$ ,

$$\begin{aligned} & [\psi_1(\xi_0) \psi_2(\xi) - \psi_2(\xi_0) \psi_1(\xi)] \cos \mu(\eta_0 - \eta) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} u [\psi_1'(\xi) \psi_2(\xi) - \psi_2'(\xi) \psi_1(\xi)] \cos \mu(\eta_0 - \eta) d\eta_0; \end{aligned}$$

d'où, en divisant par  $[\psi_1'(\xi) \psi_2(\xi) - \psi_2'(\xi) \psi_1(\xi)]$ , en ayant égard au

théorème de Fourier et en supposant  $\eta$  compris entre  $\eta_B$  et  $\eta_C$ ,

$$(4) \quad u = \pm \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi_1(\xi_0) \psi_2(\xi) - \psi_2(\xi_0) \psi_1(\xi)}{\psi_1(\xi) \psi_2(\xi) - \psi_2(\xi) \psi_1(\xi)} \cos \mu(\eta_0 - \eta) d\mu.$$

Cette expression de  $u$  a déjà été citée par Riemann (*Werke*, p. 162), à l'occasion d'une équation qui se déduit de l'équation (1), en y posant  $\varphi_2 = 0$ ; mais l'illustre géomètre n'en communique point la réduction, en négligeant même de faire observer que la région de validité de la formule (4) est déterminée par l'inégalité

$$(5) \quad (x - x_0)(y - y_0) > 0,$$

l'intégrale devant être prise avec le signe commun de  $x - x_0$  et  $y - y_0$ . On peut pourtant, malgré cette restriction, substituer la valeur (4) de  $u$  dans la formule (2) et arriver de la sorte à une expression de l'intégrale générale de l'équation (1), pourvu que l'on ait eu soin de choisir la courbe (C) de manière qu'elle intercepte sur les axes des segments de mêmes signes. En effet, on sait d'ailleurs que la courbe (C) ne doit pas avoir plus d'un seul point d'intersection avec toute droite parallèle à l'un des axes; il est donc aisé de voir que, cette courbe étant choisie comme il vient d'être dit, les valeurs de  $u$  n'interviendront dans la formule (2) que pour des valeurs de ses arguments qui satisferont à l'inégalité (5).

On voit, par conséquent, que la réduction annoncée du problème de l'intégration d'une équation de la forme (1) est réellement effectuée.

3. Je passe maintenant au problème indiqué par M. Darboux. Ce problème consiste à mettre l'élément linéaire tracé sur une surface développable sous la forme

$$(6) \quad ds^2 = \alpha du^2 + \frac{1}{\alpha} dv^2,$$

$\alpha$  étant une fonction de  $u$  et de  $v$ .

Considérons un élément linéaire tracé sur une surface appartenant à une famille de surfaces applicables quelconques

$$(7) \quad ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2.$$

Il est aisé de conclure des propriétés d'invariance des symboles de M. Beltrami

$$\Delta(\Theta) = \frac{E\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + G\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta(\Theta, \Phi) = \frac{E\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} - F\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + G\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{EG - F^2},$$

$$\Delta_2\Theta = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G}{H}\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{F}{H}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E}{H}\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{F}{H}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)\right],$$

où l'on a posé

$$H^2 = EG - F^2,$$

que les fonctions  $u$  et  $v$  de  $x$  et  $y$ , par l'introduction desquelles l'expression (7) de  $ds^2$  peut être ramenée à la forme (6), devront satisfaire chacune à une équation qui peut être écrite ainsi :

$$(8) \quad \Delta(\varphi, \Delta\varphi) = \Delta\varphi \Delta_2\varphi.$$

D'ailleurs, l'une de ces fonctions,  $u$  par exemple, étant déterminée par l'intégration de cette équation, la valeur correspondante de la seconde d'entre elles s'en déduira en intégrant une différentielle totale. On obtiendra enfin  $\alpha$  au moyen de la relation

$$\frac{1}{\alpha} = \Delta u.$$

Appliquons ceci au cas des surfaces développables; on pourra poser

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

et l'équation (8) deviendra

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] = 0.$$

C'est donc à l'intégration de cette équation que revient le problème qui nous occupe.

4. Appliquons à l'équation considérée la transformation de Legendre. Nous devons poser, en employant la notation de Monge pour

les dérivées de  $\varphi$  par rapport à  $x$  et à  $y$ ,

$$U = \varphi(x, y) - xp - yq,$$

ce qui donne

$$x = -\frac{\partial U}{\partial p}, \quad y = -\frac{\partial U}{\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

Par conséquent, l'intégration de l'équation (9) se réduit à celle de la suivante :

$$(10) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} (p^2 - q^2) - 4pq \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q} + (q^2 - p^2) \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} = 0.$$

Inutile, d'ailleurs, de se préoccuper du cas où cette transformation deviendrait illusoire, parce que les valeurs correspondantes de  $u$  et de  $v$  en fonction de  $x$  et de  $y$  sont simplement des fonctions linéaires de ces variables.

Introduisons dans l'équation (10) de nouvelles variables indépendantes  $s_1$  et  $s_2$ , telles que le seul terme du second ordre de la transformée soit  $\frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2}$ . On obtiendra  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $p$  et de  $q$  en ramenant l'expression

$$d\sigma^2 = (p^2 - q^2) dp^2 + 4pq dp dq + (q^2 - p^2) dq^2$$

à la forme

$$d\sigma^2 = \lambda ds_1 ds_2.$$

On reconnaît aisément que l'on peut poser

$$(11) \quad \begin{cases} s_1 = \frac{1}{2} \log(p^2 + q^2) + \arctang \frac{p}{q}, \\ s_2 = \frac{1}{2} \log(p^2 + q^2) - \arctang \frac{p}{q}. \end{cases}$$

Observons, afin d'opérer rapidement le changement de variables en question, que l'équation (10) est la condition pour que la variation de l'intégrale

$$(12) \quad I = \iint \left( \frac{\partial U}{\partial q} \frac{p - q}{p^2 + q^2} - \frac{\partial U}{\partial p} \frac{p + q}{p^2 + q^2} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial q} \frac{p + q}{p^2 + q^2} + \frac{p - q}{p^2 + q^2} \frac{\partial U}{\partial p} \right) dp dq,$$



étendue à une aire quelconque, ne dépende que des valeurs de la variation de  $U$  à la limite de cette aire.

Il vient, en transformant l'intégrale (12),

$$I = 2 \int \int \frac{\partial U}{\partial s_1} \frac{\partial U}{\partial s_2} e^{-(s_1+s_2)} ds_1 ds_2.$$

La transformée de (10) sera, par conséquent, l'équation suivante, qui rentre dans le type (1),

$$(13) \quad 2 \frac{\partial^2 U}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial U}{\partial s_1} - \frac{\partial U}{\partial s_2} = 0.$$

5. L'intégrale générale de cette équation peut être aisément exprimée au moyen de la formule (2). En effet, on peut déterminer la fonction  $u$ , qui figurera ici dans cette formule, soit en calculant directement l'intégrale appropriée de l'équation adjointe à l'équation (13), chose facile dans l'exemple considéré, soit en regardant, ainsi que le fait Riemann dans un cas analogue (*Werke*, p. 163), l'équation (13) comme un cas-limite de l'équation que M. Darboux désigne par  $E(\beta, \beta)$  [*Cours de Géométrie*, t. II, p. 54], soit enfin en appliquant la formule (4). C'est cette dernière méthode que je vais suivre.

On trouve sans la moindre peine, en posant

$$2s_1 = \zeta + \eta, \quad 2s_2 = \zeta - \eta, \quad 2s_1^{(0)} = \zeta_0 + \eta_0, \quad 2s_2^{(0)} = \zeta_0 - \eta_0,$$

$$u = \pm \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}(\zeta_0 + \zeta) + (\zeta_0 - \zeta)\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}} - e^{\frac{1}{2}(\zeta + \zeta_0) - (\zeta_0 - \zeta)\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}}}{2\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2} e^{\frac{\zeta}{2}}} \cos \mu(\eta_0 - \eta) d\mu$$

ou bien

$$(14) \quad u = \pm \frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}(\zeta_0 - \zeta)} I,$$

où l'on a posé

$$(15) \quad I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{(\zeta_0 - \zeta)\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}} - e^{-(\zeta_0 - \zeta)\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}} \right) \frac{\cos \mu(\eta_0 - \eta)}{\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}} d\mu.$$

Je ferai voir que  $I$  est une fonction transcendante entière dont je donnerai le développement, et j'arriverai ainsi à une expression de  $u$  valable pour des valeurs absolument quelconques de ses arguments.

Revenons, en effet, aux variables  $s_1$  et  $s_2$ ; posons, pour abrégier l'écriture,

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2} + i\mu, \quad t_2 = \sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2} - i\mu,$$

et remplaçons le cosinus par des exponentielles imaginaires. Il viendra

$$I = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{(s_1^{(0)} - s_1)t_1 + (s_2^{(0)} - s_2)t_1} - e^{-(s_1^{(0)} - s_1)t_1 - (s_2^{(0)} - s_2)t_1} \right. \\ \left. + e^{(s_1^{(0)} - s_1)t_2 + (s_2^{(0)} - s_2)t_2} - e^{-(s_1^{(0)} - s_1)t_2 - (s_2^{(0)} - s_2)t_2} \right] \frac{d\mu}{\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}}.$$

Introduisons dans cette intégrale, au lieu de  $\mu$ , la nouvelle variable

$$\tau = it_2 = \mu + i\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2},$$

et observons à cet effet que l'on n'est pas forcé de faire parcourir à  $\mu$ , dans l'intégrale (15), exclusivement des valeurs réelles. On peut, au contraire, malgré la racine  $\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}$  qui y figure, suivre un chemin d'intégration quelconque, à cette restriction près que, à l'infini, la partie imaginaire de  $\mu$  tende vers zéro.

Choisissons un chemin d'intégration tel que la détermination de  $\tau$ , qui pour  $\mu = -\infty$  est égale à  $(-\infty)$ , devienne, sans s'annuler pour  $\mu = +\infty$ , égale à  $(+\infty)$ . Il viendra

$$I = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{i \left[ \frac{s_1 - s_1^0}{4\tau} - (s_1 - s_1^0)\tau \right]} - e^{-i \left[ \frac{s_1 - s_1^0}{4\tau} - (s_1 - s_1^0)\tau \right]} \right. \\ \left. + e^{i \left[ \frac{s_2 - s_2^0}{4\tau} - (s_2 - s_2^0)\tau \right]} - e^{-i \left[ \frac{s_2 - s_2^0}{4\tau} - (s_2 - s_2^0)\tau \right]} \right\} \frac{d\tau}{\tau}.$$

On peut développer  $I$  en une série de la forme

$$(16) \quad I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n,$$

en posant

$$I_n = \frac{i^{n+1} (s_1 - s_1^0)^n}{4^{n+1} n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{-i(s_1 - s_1^0)\tau} - (-1)^n e^{i(s_1 - s_1^0)\tau} \right] \frac{d\tau}{\tau^{n+1}} \\ + \frac{i^{n+1} (s_2 - s_2^0)^n}{4^{n+1} n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{-i(s_2 - s_2^0)\tau} - (-1)^n e^{i(s_2 - s_2^0)\tau} \right] \frac{d\tau}{\tau^{n+1}}.$$

On trouve, en intégrant par parties,

$$(17) \quad I_n = \frac{(s_1 - s_1^{(0)})(s_2 - s_2^{(0)})}{4 \cdot n^2} I_{n-1}.$$

Tout est donc réduit au calcul de  $I_0$ . Il vient

$$(18) \quad I_0 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} [\sin \tau (s_2 - s_2^{(0)}) + \sin \tau (s_1 - s_1^{(0)})] \frac{d\tau}{\tau} = \pm \pi,$$

suivant le signe commun de  $s_1 - s_1^{(0)}$  et de  $s_2 - s_2^{(0)}$ .

Les équations (14), (16), (17) et (18) donnent, par conséquent,

$$u = e^{\frac{1}{2}(s_1^{(0)} + s_2^{(0)} - s_1 - s_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_1 - s_1^{(0)})^n (s_2 - s_2^{(0)})^n}{(n!)^2 \cdot 4^n},$$

expression jouissant évidemment des propriétés annoncées.

La formule (2) permettant, d'après cela, d'exprimer l'intégrale générale de l'équation (13), l'équation (9) doit être considérée comme intégrée. Le problème indiqué par M. Darboux est donc résolu.



---

SUR LES

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

QUADRUPLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. P. APPELL.

---

1. En suivant la classification employée par M. Hermite pour les fonctions doublement périodiques d'une variable, nous appellerons *fonction quadruplement périodique de troisième espèce* une fonction uniforme de deux variables  $x$  et  $y$  qui se reproduit, multipliée par une exponentielle linéaire en  $x$  et  $y$ , quand on augmente les variables de chacune des quatre paires de périodes. Nous supposons essentiellement que l'on ne puisse pas, en multipliant cette fonction par une exponentielle de la forme

$$e^{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey},$$

la ramener à être quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, c'est-à-dire à se reproduire multipliée par l'unité ou par une constante quelconque, quand on ajoute aux variables chacune des quatre paires de périodes.

On sait, d'après un théorème énoncé par Riemann et confirmé par M. Weierstrass (1), qu'une fonction quadruplement périodique de

---

(1) MM. Picard et Poincaré ont démontré ce théorème par des considérations empruntées à la théorie des intégrales abéliennes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 3 décembre 1883). J'ai indiqué depuis (*Comptes rendus*, 27 janvier 1890), pour démontrer ce même théorème, une méthode plus directe, qui a de nombreux points communs avec celle que j'emploie dans le présent travail.

deux variables, de première espèce, qui n'a pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être ramenée à avoir pour paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

vérifiant la relation

$$\beta = \alpha'.$$

Si la fonction admet des singularités essentielles, les paires de périodes  $(\alpha, \beta)$  et  $(\alpha', \beta')$  sont entièrement arbitraires. M. Picard a donné des exemples de fonctions de ce genre <sup>(1)</sup>.

A cet égard, il y a, entre les fonctions quadruplement périodiques de deux variables de première et de deuxième espèce d'une part, et de troisième espèce d'autre part, cette différence remarquable que, même si une fonction de troisième espèce admet des singularités essentielles, on peut toujours ramener ses périodes à être

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta')$$

avec la relation de Riemann,

$$\beta = \alpha'.$$

Le présent travail est principalement consacré à la démonstration de ce théorème, que je me suis borné à énoncer dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 25 mars 1889. Il contient, en outre, quelques exemples généraux de fonctions ou expressions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce.

2. Étant donnée une fonction quadruplement périodique de troisième espèce, on peut toujours, par un changement linéaire de variables, ramener les quatre paires de périodes à avoir la forme

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta').$$

Soit alors  $F(x, y)$  une fonction quadruplement périodique de troi-

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, 1<sup>er</sup> semestre 1889; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII, p. 131; 1889.

sième espèce admettant ces quatre paires de périodes, on aura d'abord

$$(1) \quad \begin{cases} F(x + 2\pi i, y) = e^{px+qy+r} F(x, y), \\ F(x, y + 2\pi i) = e^{p'x+q'y+r'} F(x, y), \end{cases}$$

$p, q, r, p', q', r'$  désignant des constantes; puis on aura deux autres relations de la même forme pour les deux autres paires de périodes. En ajoutant  $2\pi i$  à  $y$  dans la première de ces relations (1) et tenant compte de la seconde, on a

$$F(x + 2\pi i, y + 2\pi i) = e^{(p+p')x+(q+q')y+r+r'+2q\pi i} F(x, y);$$

ajoutant de même  $2\pi i$  à  $x$  dans la seconde des relations (1) et tenant compte de la première, on trouve une nouvelle expression de

$$F(x + 2\pi i, y + 2\pi i)$$

qui, par comparaison avec la précédente, donne

$$e^{2q\pi i} = e^{2p'\pi i}, \quad p' = q + n,$$

$n$  désignant un entier. Soit  $\varphi(x, y)$  une exponentielle de la forme

$$\varphi(x, y) = e^{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey},$$

on pourra, par des équations du premier degré, déterminer les constantes  $A, B, C, D, E$ , de telle façon que

$$\begin{aligned} \varphi(x + 2\pi i, y) &= e^{-(px+qy+r)} \varphi(x, y), \\ \varphi(x, y + 2\pi i) &= e^{-(q'x+q'y+r')} \varphi(x, y), \end{aligned}$$

comme on le vérifie immédiatement. Si l'on pose alors

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) F(x, y),$$

en tenant compte de la relation

$$p' = q + n,$$

on voit que cette fonction  $\Phi$  vérifiera les deux relations

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi(x + 2\pi i, y) = \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y + 2\pi i) = e^{nx} \Phi(x, y); \end{cases}$$

puis, par rapport aux autres paires de périodes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\alpha'$ ,  $\beta'$ , elle vérifiera deux relations de la forme

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi(x + \alpha, y + \beta) = e^{ax + b_1 y + c} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + \alpha', y + \beta') = e^{a'x + b'_1 y + c'} \Phi(x, y), \end{cases}$$

$a$ ,  $b_1$ ,  $c$ ,  $a'$ ,  $b'_1$ ,  $c'$  désignant des constantes.

Si, dans la première des relations (3), on change  $x$  en  $x + 2\pi i$ , on trouve

$$e^{2a\pi i} = 1 \quad (a \text{ entier});$$

si ensuite on change  $y$  en  $y + 2\pi i$  en tenant compte de la relation

$$\Phi(x, y + 2\pi i) = e^{n_1 x} \Phi(x, y),$$

on trouve que l'on doit avoir

$$e^{2b_1\pi i} = e^{n_1 x},$$

d'où

$$2b_1\pi i = n_1 x + 2b\pi i \quad (b \text{ entier}).$$

La seconde des relations (3) montre de même que  $a'$  est entier et que l'on a

$$2b'_1\pi i = n_1 x' + 2b'\pi i,$$

$b'$  étant un entier. Les relations (3) s'écrivent donc

$$(4) \quad \begin{cases} \Phi(x + \alpha, y + \beta) = e^{n_1 x + b_1 y + \frac{n_1 \alpha}{2\pi i} y + c} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + \alpha', y + \beta') = e^{n_1 x' + b'_1 y + \frac{n_1 \alpha'}{2\pi i} y + c'} \Phi(x, y), \end{cases}$$

où  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  sont des nombres entiers. Nous supposons essentiellement que ces cinq nombres entiers ne sont pas tous nuls; car, s'ils étaient nuls, la fonction  $\Phi$  serait quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite au commencement. Nous déduirons alors de ces relations (4) une relation entre les périodes d'une importance capitale. Pour cela, dans la première de ces relations, changeons  $x$  et  $y$  en  $x + \alpha'$  et  $y + \beta'$ , puis tenons compte de la deuxième; nous trouvons, pour le rapport

$$(5) \quad \frac{\Phi(x + \alpha + \alpha', y + \beta + \beta')}{\Phi(x, y)}$$

la valeur

$$e^{(a+a')x + (b+b')y + \frac{n}{2\pi i}(2+x')y + c + c' + a\alpha' + b\beta' + \frac{n}{2\pi i}\alpha\beta'}.$$

De même, en changeant dans la seconde des relations (4)  $x$  et  $y$  en  $x + \alpha$  et  $y + \beta$ , puis tenant compte de la première, on trouve pour le rapport (5) une nouvelle expression qui, comparée à la précédente, donne

$$(6) \quad a\alpha' + b\beta' + \frac{n}{2\pi i}\alpha\beta' = a'\alpha + b'\beta + \frac{n}{2\pi i}\beta\alpha' + 2N\pi i,$$

$N$  désignant un entier.

Cette relation permet de montrer que l'on peut toujours, par une transformation d'un degré convenable, ramener les quatre paires de périodes à être

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (A, B), \quad (A', B'),$$

avec la condition

$$A' = B.$$

3. Pour cela, nous distinguerons deux cas, suivant que l'entier  $n$  est nul ou non.

*Premier cas :  $n = 0$ .* — Les nombres entiers  $a, b, a', b'$  ne sont pas nuls tous les quatre, mais il pourrait arriver que leur déterminant fût nul.

Supposons d'abord le déterminant

$$\delta = ab' - ba'$$

différent de zéro. Les relations (4) étant actuellement

$$\begin{aligned} \Phi(x + \alpha, y + \beta) &= e^{ax + by + c} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + \alpha', y + \beta') &= e^{a'x + b'y + c'} \Phi(x, y), \end{aligned}$$

on en conclut

$$(7) \quad \begin{cases} \Phi(x + a'\alpha - a\alpha', y + a'\beta - a\beta') = e^{-\delta y + \varepsilon'} \Phi(x, y), \\ \Phi(x - b'\alpha + b\alpha', y - b'\beta + b\beta') = e^{-\delta x + \varepsilon} \Phi(x, y), \end{cases}$$

$\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  désignant des constantes.



Le déterminant  $\delta$  n'étant pas nul, prenons pour nouvelles paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (A, B), \quad (A', B'),$$

où

$$\begin{aligned} A &= b\alpha' - b'\alpha, & B &= b\beta' - b'\beta, \\ A' &= a'\alpha - a\alpha' + 2N\pi i, & B' &= a'\beta - a\beta'. \end{aligned}$$

Ces nouvelles périodes sont distinctes comme les périodes primitives, puisque  $\delta$  est différent de zéro; la fonction  $\Phi$  vérifie alors les relations

$$\begin{aligned} \Phi(x + 2\pi i, y) &= \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y + 2\pi i) &= \Phi(x, y), \\ \Phi(x + A, y + B) &= e^{-\delta x + \varepsilon} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + A', y + B') &= e^{-\delta y + \varepsilon'} \Phi(x, y), \end{aligned}$$

et la relation (6), où l'on fait  $n = 0$ , donne

$$B = A'.$$

Supposons maintenant  $\delta = 0$ . Nous allons voir que, dans ce cas, il y a réduction, et que la fonction  $\Phi$  peut être ramenée à une fonction de deux variables doublement périodique de troisième espèce par rapport à l'une des variables, l'autre étant regardée comme une constante. En effet, les quatre nombres  $a, b, a', b'$  n'étant pas nuls tous quatre, supposons  $a'$  différent de zéro. La relation

$$ab' - ba' = 0$$

montre que, si  $b'$  est nul,  $b$  l'est aussi. Dans ce cas particulier, la relation (6)

$$a\alpha' + b\beta' = a'\alpha + b'\beta + 2N\pi i$$

donne

$$a\alpha' = a'\alpha + 2N\pi i.$$

La fonction  $\Phi$  admettrait alors les deux groupes de périodes

$$\begin{aligned} 0, \quad 2\pi i, \\ a'\alpha - a\alpha' + 2N\pi i, \quad a'\beta - a\beta', \end{aligned}$$

qui se réduiraient à

$$(0, 2\pi i), \quad (0, \alpha'\beta - \alpha\beta');$$

elle serait donc doublement périodique par rapport à  $y$  seul.

Si  $a'$  et  $b'$  sont tous deux différents de zéro, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{m}{m'},$$

$m$  et  $m'$  étant premiers entre eux, et  $m$  devant être remplacé par zéro quand  $a$  et  $b$  sont nuls. Donc

$$a = pm, \quad a' = pm', \quad b = qm, \quad b' = qm'.$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers non nuls. La relation (6) devient alors

$$(8) \quad m(p\alpha' + q\beta') = m'(p\alpha + q\beta) + 2N\pi i.$$

Faisons le changement linéaire de variables

$$X = px + qy, \quad Y = y,$$

et adoptons pour  $x$  et  $y$  les paires de périodes

$$(-2q\pi i, 2p\pi i), \quad (0, 2\pi i), \quad (m'\alpha - m\alpha', m'\beta - m\beta'), \quad (\alpha', \beta').$$

Les paires de périodes correspondantes relatives aux variables  $X$  et  $Y$  seront, d'après (8), données par le Tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} X : A_{11} = 0, & A_{21} = 2q\pi i, & B_{11} = -2N\pi i, & B_{21} = p\alpha' + q\beta', \\ Y : A_{12} = 2p\pi i, & A_{22} = 2\pi i, & B_{12} = m'\beta - m\beta', & B_{22} = \beta'. \end{array}$$

Si donc  $N$  est nul, *deux périodes* relatives à  $X$  sont nulles,  $A_{11}$  et  $B_{11}$ ; si  $N$  est différent de zéro, la combinaison

$$NA_{21} + qB_{11}, \quad NA_{22} + qB_{12}$$

donne une paire de périodes dans laquelle la période relative à  $X$  est encore nulle. Donc la fonction  $\Phi(x, y)$  exprimée en  $X$  et  $Y$  est *doublement périodique par rapport à  $Y$  seul*. Il y a donc réduction, comme

nous l'avons annoncé, toutes les fois que le déterminant

$$\delta = ab' - ba'$$

est nul en même temps que  $n$ .

*Second cas :  $n$  différent de zéro.* — Reprenons les relations (4)

$$(4) \quad \begin{cases} \Phi(x + 2\pi i, y) = \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y + 2\pi i) = e^{nx} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + \alpha, y + \beta) = e^{ax + by + \frac{n\alpha}{2\pi i}y + c} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + \alpha', y + \beta') = e^{a'x + b'y + \frac{n\alpha'}{2\pi i}y + c'} \Phi(x, y), \end{cases}$$

et la relation (6) qui lie les périodes

$$(6) \quad a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2N\pi i.$$

Nous allons ramener les relations (4) à la forme des relations que vérifient les fonctions  $\Theta$ .

On a, puisque  $n, a, b$  sont des entiers,

$$\Phi(x + n\alpha + 2b\pi i, y + n\beta - 2a\pi i) = e^{ly+k} \Phi(x, y),$$

où  $l$  et  $k$  désignent des constantes dont la première est

$$l = \frac{n}{2\pi i} (n\alpha + 2b\pi i);$$

on trouvera de même

$$\Phi(x + n\alpha' + 2b'\pi i, y + n\beta' - 2a'\pi i) = e^{l'y+k'} \Phi(x, y),$$

$$l' = \frac{n}{2\pi i} (n\alpha' + 2b'\pi i).$$

Prenons, comme paires de périodes,

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha'_1, \beta'_1)$$

en posant

$$\alpha_1 = n\alpha + 2b\pi i, \quad \beta_1 = n\beta - 2a\pi i,$$

$$\alpha'_1 = n\alpha' + 2b'\pi i, \quad \beta'_1 = n\beta' - 2a'\pi i;$$

ces nouvelles périodes sont indépendantes comme les premières. Les

relations ci-dessus peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned}\Phi(x + 2\pi i, y) &= \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y + 2\pi i) &= e^{nx} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= e^{ly+k} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + \alpha'_1, y + \beta'_1) &= e^{l'y+k'} \Phi(x, y), \\ l &= \frac{n\alpha_1}{2\pi i}, \quad l' = \frac{n\alpha'_1}{2\pi i}.\end{aligned}$$

De plus, la relation (6) devient, si l'on y remplace  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  par leurs expressions en fonction de  $\alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1$ ,

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi i} (\beta_1 \alpha'_1 - \alpha_1 \beta'_1) = 2M\pi i,$$

$M$  désignant un entier *non nul*, comme nous le verrons plus loin.

La période  $\beta_1$  n'est pas nulle; car, si l'on avait  $\beta_1 = 0$ , la fonction  $\Phi$  serait doublement périodique par rapport à  $x$  seul. Si nous posons

$$\Phi_1(x, y) = e^{\lambda y^2 + \mu y} \Phi(x, y),$$

nous pourrions déterminer  $\lambda$  et  $\mu$  de façon que  $\Phi_1(x, y)$  ne change pas quand on augmente  $x$  et  $y$  de la paire de périodes  $\alpha_1, \beta_1$ . Nous aurons

$$\lambda = -\frac{l}{2\beta_1} = -\frac{n\alpha_1}{4i\pi\beta_1}.$$

La fonction  $\Phi_1$  vérifie alors les relations suivantes, où nous prenons comme second groupe de périodes  $(0, 2M\pi i)$  au lieu de  $(0, 2\pi i)$ ,

$$\begin{aligned}\Phi_1(x + 2\pi i, y) &= \Phi_1(x, y), \\ \Phi_1(x, y + 2M\pi i) &= e^{Mn(x - \frac{\alpha_1}{\beta_1}y) + C} \Phi_1(x, y), \\ \Phi_1(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= \Phi_1(x, y), \\ \Phi_1(x + \alpha'_1, y + \beta'_1) &= e^{\frac{2Mn\pi}{\beta_1}y + C'} \Phi_1(x, y),\end{aligned}$$

où  $C$  et  $C'$  désignent des constantes.

Faisons enfin un changement linéaire de variables, en posant

$$\begin{aligned}X &= x - \frac{\alpha_1}{\beta_1}y, \quad Y = \frac{2\pi i}{\beta_1}y, \\ \Phi_1(x, y) &= \Phi_2(X, Y).\end{aligned}$$

Les paires de périodes de X et Y correspondant aux paires de périodes  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha'_1, \beta'_1)$  de  $x$  et  $y$  sont

$$(0, 2\pi i), \left( \frac{\beta_1 \alpha'_1 - \alpha_1 \beta'_1}{\beta_1}, \frac{2\pi i \beta'_1}{\beta_1} \right);$$

on voit donc que l'entier M qui figure dans la relation (9) n'est pas nul, car autrement, dans ces deux paires de périodes, les périodes relatives à X seraient *nulles* et la fonction  $\Phi_2$  serait doublement périodique en X seul. En formant le Tableau complet des paires de périodes de X et Y correspondant à celles de  $x$  et  $y$ , on aura :

| Périodes de $x$ et $y$ . | Périodes de X et Y. |
|--------------------------|---------------------|
| $(2\pi i, 0)$            | $(2\pi i, 0)$       |
| $(0, 2M\pi i)$           | $(A, B)$            |
| $(\alpha_1, \beta_1)$    | $(0, 2\pi i)$       |
| $(\alpha'_1, \beta'_1)$  | $(A', B')$          |

où l'on a posé

$$A = -\frac{2M\pi i \alpha_1}{\beta_1}, \quad B = -\frac{4\pi^2 M}{\beta_1},$$

$$A' = \frac{\beta_1 \alpha'_1 - \alpha_1 \beta'_1}{\beta_1}, \quad B' = \frac{2\pi i \beta'_1}{\beta_1}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned} \Phi_2(X + 2\pi i, Y) &= \Phi_2(X, Y), \\ \Phi_2(X, Y + 2\pi i) &= \Phi_2(X, Y), \\ \Phi_2(X + A, Y + B) &= e^{MnX+C} \Phi_2(X, Y), \\ \Phi_2(X + A', Y + B') &= e^{MnY+C'} \Phi_2(X, Y), \end{aligned}$$

et la relation (9) donnera

$$B = A',$$

ce qu'il fallait démontrer.

En résumé, dans les deux cas,  $n = 0$  et  $n \geq 0$ , on peut ramener la fonction  $\Phi$ , quadruplement périodique de troisième espèce, à vérifier des relations de la même forme que celles que vérifient les fonctions  $\Theta$  de deux variables, avec la condition de Riemann

$$B = A'.$$

4. Pour donner des exemples de fonctions de deux variables qua-

druplement périodiques de troisième espèce, suivons une méthode analogue à celle qui sert à former l'élément simple dans la théorie des fonctions doublement périodiques de troisième espèce (*Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. I, II, III), ou, en nous plaçant à un point de vue plus général, imitons ce que fait Halphen dans son *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 468 (1).

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  trois quantités telles que la partie réelle de la forme quadratique

$$\alpha m^2 + \beta n^2 + 2\gamma mn$$

soit négative pour toutes les valeurs réelles de  $m$  et  $n$  autres que  $m = n = 0$ ; soit  $p$  un nombre entier positif, et  $\varphi(u, v)$  une fonction uniforme des deux variables  $u$  et  $v$ . Si la série

$$\Phi(x, y) = \sum_{m, n = -\infty}^{m, n = +\infty} e^{p(2m^2 + \beta n^2 + 2\gamma mn + m\alpha + ny)} \varphi(e^{x+2m\alpha+2n\gamma}, e^{y+2m\gamma+2n\beta})$$

est convergente, elle définit une fonction uniforme de  $x$  et  $y$  vérifiant les quatre relations

$$\begin{aligned} \Phi(x + 2\pi i, y) &= \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y + 2\pi i) &= \Phi(x, y), \\ \Phi(x + 2\alpha, y + 2\gamma) &= e^{-p(x+\alpha)} \Phi(x, y), \\ \Phi(x + 2\gamma, y + 2\beta) &= e^{-p(y+\beta)} \Phi(x, y); \end{aligned}$$

cette fonction est donc quadruplement périodique de troisième espèce. Lorsque la fonction  $\varphi(u, v)$  est un polynôme en  $u, v, \frac{1}{u}$  et  $\frac{1}{v}$ , la fonction  $\Phi$  est composée linéairement avec des fonctions  $\Theta$  de deux variables. Lorsque la fonction  $\varphi(u, v)$  est rationnelle, la fonction  $\Phi$  possède des singularités essentielles à distance finie. Par exemple, on pourra prendre pour  $\varphi(u, v)$  les expressions

$$\frac{1}{1+u}, \quad \frac{1}{1+v}, \quad \frac{1}{(1+u)(1+v)}, \quad \dots, \quad \frac{u^a v^b}{(1+u)^{a'}(1+v)^{b'}},$$

$a, b, a', b'$  désignant des entiers positifs. En supposant  $\alpha, \beta, \gamma$  réels,

(1) Voyez une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences le 25 mars 1889 (*Comptes rendus*, t. CVIII).

les fonctions  $\Phi$  correspondantes possèdent les surfaces de singularités

$$x'' = (2h + 1)\pi, \quad y'' = (2k + 1)\pi,$$

où l'on a posé  $x = x' + ix''$ ,  $y = y' + iy''$  et où  $h$  et  $k$  désignent des entiers quelconques. L'hypothèse  $a = b = 1$ ,  $a' = b' = 2$  fournit une fonction de troisième espèce, analogue à la fonction de première espèce que M. Picard donne comme exemple dans sa Note du 18 mars 1889 (*Comptes rendus*, t. CVIII) (1).

---

(1) Voyez aussi *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVII, p. 131.



---


# RECHERCHES SUR LES SURFACES

QUI SONT EN MÊME TEMPS

## LIEUX DE CONIQUES ET ENVELOPPES DE CONES

DU SECOND DEGRÉ,

PAR M. E. BLUTEL,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU PRYTANÉE MILITAIRE.



### INTRODUCTION.

Les surfaces engendrées par des coniques ont été l'objet de nombreuses recherches; nous rappellerons particulièrement les travaux de MM. Steiner, Kummer, Clebsch, Darboux et Kœnigs sur des surfaces algébriques d'ordre supérieur au second et possédant une ou plusieurs séries de coniques.

Les surfaces enveloppes de sphères ont donné naissance également à un grand nombre de théorèmes remarquables, et les surfaces cerclées ont été étudiées d'une façon générale par M. Demartres, dans sa thèse *Sur les surfaces à génératrices circulaires*.

M. Schwarz a enfin examiné les surfaces minima enveloppes de cônes du second degré, que nous retrouverons plus loin dans cette étude.

Nous nous proposons, dans ce travail, de rechercher les propriétés particulières aux surfaces engendrées par une conique variable dépendant d'un paramètre, dans le cas où il existe un cône circonscrit à la surface le long de chaque conique.

La première Partie est consacrée à la démonstration d'un théorème important touchant le système formé par les coniques et leurs lignes



conjuguées sur la surface, puis à la recherche des équations générales des surfaces engendrées de cette façon, et à la démonstration de propriétés géométriques concernant le déplacement des génératrices ou celui des cônes enveloppants; enfin, à la détermination de certaines catégories de surfaces simples jouissant de ce mode de génération.

Dans la seconde Partie, nous étudions principalement les propriétés des lignes asymptotiques de ces surfaces, et nous cherchons à déterminer certaines espèces pour lesquelles ces propriétés se transforment en d'autres plus simples.

Enfin, une troisième Partie est consacrée à l'étude de quelques propriétés non projectives, et particulièrement à la recherche des trajectoires orthogonales d'un système de coniques dépendant d'un paramètre.

Un grand nombre de propriétés que nous démontrerons peuvent être généralisées; dans quelques cas, nous nous contenterons d'énoncer cette généralisation.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

---

Considérons une série de cônes du second degré dépendant d'un paramètre variable; ces cônes enveloppent une surface, que l'on peut regarder aussi comme engendrée par une quartique à point double. En effet, deux cônes infiniment voisins se coupent suivant une pareille courbe, qui est la courbe de contact de l'un d'eux avec l'enveloppe. On s'en assure aisément par la considération de l'équation générale des cônes

$$(1) \quad \varphi(x - X, y - Y, z - Z) = 0,$$

$\varphi$  étant une forme quadratique homogène dont les coefficients dépendent d'un paramètre  $\lambda$ , et XYZ désignant les coordonnées du sommet du cône qui dépendent du même paramètre.

Si l'on suppose le sommet S pris comme origine d'un nouveau système d'axes  $(Sx'y'z')$  parallèles aux premiers, l'intersection du cône (1) avec le cône infiniment voisin est définie par les deux équations

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi(x', y', z') = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{dY}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{dZ}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent bien le fait énoncé, et font voir, de plus, que les tangentes au point double à la caractéristique du cône sont contenues dans le plan

$$(3) \quad \frac{dX}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \frac{dY}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + \frac{dZ}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0,$$

c'est-à-dire dans le plan diamétral conjugué par rapport au cône de la tangente ST à la trajectoire  $\Sigma$  de son sommet.

Nous voulons que la caractéristique soit une conique; il faut donc que la courbe (2) se décompose et, par suite, que l'on puisse faire passer un système de deux plans par l'intersection des surfaces (2). L'un de ces plans sera nécessairement le plan (3), et la caractéristique se décomposera en une conique C et en un système de deux génératrices que nous appellerons SH et SH'. Il est à remarquer que ces deux droites sont les génératrices de contact du cône avec les plans tangents qui lui sont menés par ST; le cône touchera son enveloppe suivant ces deux droites et suivant C. Ces droites SH et SH' vont donc engendrer deux développables,  $\Delta$  et  $\Delta'$ , circonscrites à  $\Sigma$  et tangentes à tous les cônes. On peut dire que deux cônes infiniment voisins ont deux plans tangents communs, TSH et TSH', de même que deux quadriques qui se coupent suivant deux coniques. Ces surfaces se transformant en d'autres de même espèce, dans une transformation par polaires réciproques, sont aussi engendrées par des coniques qui admettent deux courbes enveloppes. Ainsi :

*Les surfaces que nous étudions peuvent être envisagées soit comme enveloppes de cônes roulant sur deux développables, soit comme lieux de coniques roulant sur deux courbes.*

A cette catégorie appartiennent évidemment les quadriques; pour celles-ci, d'ailleurs, la trajectoire du sommet du cône ou la dévelop-

pable enveloppe des plans des coniques peut être choisie arbitrairement, et l'une est la polaire réciproque de l'autre par rapport à la quadrique. Nous remarquerons encore que, pour les surfaces du second degré, les points de rencontre  $K$  et  $K'$  de deux coniques infiniment voisines sont confondus avec les pieds  $H$  et  $H'$  des génératrices précédentes sur la conique. Cette particularité importante, comme nous le verrons plus tard, ne se trouve pas réalisée en général.

Les différentes propriétés que nous venons de découvrir par la Géométrie peuvent être établies aussi par le calcul; nous allons en reprendre l'étude; mais, auparavant, nous démontrerons la proposition fondamentale suivante :

**THÉOREME.** — *Les génératrices coniques de la surface sont divisées homographiquement par leurs lignes conjuguées.*

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait mis les équations de la conique variable sous la forme

$$(4) \quad \begin{cases} x = X + \frac{p_1 \mu^2 + 2q_1 \mu + r_1}{P \mu^2 + 2Q \mu + R} = X + \frac{n_1}{N}, \\ y = Y + \frac{p_2 \mu^2 + 2q_2 \mu + r_2}{P \mu^2 + 2Q \mu + R} = Y + \frac{n_2}{N}, \\ z = Z + \frac{p_3 \mu^2 + 2q_3 \mu + r_3}{P \mu^2 + 2Q \mu + R} = Z + \frac{n_3}{N}. \end{cases}$$

$p_1, q_1, r_1, \dots, P, Q, R, X, Y, Z$  étant des fonctions de  $\lambda$ , et  $\mu$  désignant un paramètre variable [ $X, Y, Z$  sont encore les coordonnées du sommet du cône circonscrit le long de la conique ( $\lambda$ )]. Cette forme d'équations suppose que les courbes  $\mu = \text{const.}$  forment un système qui partage homographiquement les coniques proposées.

En écrivant que le plan tangent à la surface engendrée par la conique (4) va passer par le sommet  $S(X, Y, Z)$ , quel que soit  $\mu$ , nous obtenons l'identité

$$(5) \quad \begin{vmatrix} n_1 & \frac{\partial n_1}{\partial \mu} & \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + N \frac{dX}{d\lambda} \\ n_2 & \frac{\partial n_2}{\partial \mu} & \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + N \frac{dY}{d\lambda} \\ n_3 & \frac{\partial n_3}{\partial \mu} & \frac{\partial n_3}{\partial \lambda} + N \frac{dZ}{d\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

n'est pas nul identiquement, nous arrivons à l'équation

$$(10) \quad \frac{d\mu}{d\lambda} + \beta = 0.$$

Posons

$$\delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix},$$

déterminant qui n'est pas nul, quel que soit  $\lambda$ , sans quoi le cône circonscrit se réduirait à un plan, et appelons  $\varpi_i$ ,  $\chi_i$ ,  $\rho_i$  les dérivées partielles de ce déterminant par rapport aux éléments  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $r_i$ . Un calcul simple, effectué au moyen des équations (8), permet d'écrire

$$(11) \quad \begin{cases} 2\delta\beta = + (\chi_1 - 2\mu\rho_1) \left( \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + N \frac{dX}{d\lambda} \right) \\ \quad + (\chi_2 - 2\mu\rho_2) \left( \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + N \frac{dY}{d\lambda} \right) + (\chi_3 - 2\mu\rho_3) \left( \frac{\partial n_3}{\partial \lambda} + N \frac{dZ}{d\lambda} \right). \end{cases}$$

Le second membre semble être du troisième degré par rapport à  $\mu$ ; mais il est aisé de voir que le coefficient du terme en  $\mu^3$  est nul : c'est, à un facteur près,

$$\rho_1 \left( \frac{dp_1}{d\lambda} + P \frac{dX}{d\lambda} \right) + \rho_2 \left( \frac{dp_2}{d\lambda} + P \frac{dY}{d\lambda} \right) + \rho_3 \left( \frac{dp_3}{d\lambda} + P \frac{dZ}{d\lambda} \right),$$

c'est-à-dire le coefficient du terme en  $\mu^4$  dans l'identité (5).

$\beta$  est donc un polynôme du second degré en  $\mu$  et l'équation (10) est une équation de Riccati, d'où l'on conclut la propriété énoncée plus haut.

Des considérations analogues permettent de démontrer la propriété suivante, plus générale :

Imaginons une congruence de droites admettant une courbe focale. Supposons que le cône de droites ayant son sommet en un point de cette courbe soit unicursal et que, de plus, sa courbe de contact avec la surface focale soit plane. Les courbes conjuguées de ces courbes de contact, c'est-à-dire les arêtes de rebroussement des développables engendrées par les droites de la congruence sont fournies par l'inté-

gration d'une équation

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{A(\lambda, \mu)}{B(\lambda, \mu)},$$

où  $A$  est un polynôme de degré  $r + 2$  au plus, et  $B$  un polynôme de degré  $r$  par rapport à  $\mu$ , si  $r$  désigne le nombre des génératrices de rebroussement du cône de la congruence dont l'ordre  $n$  n'intervient pas. En particulier, si le cône n'a pas de génératrices de rebroussement, on tombe sur une équation de Riccati, et nous retrouvons le théorème démontré plus haut pour les surfaces enveloppes de cônes du second degré et lieux de coniques.

La question suivante se pose maintenant :

Les surfaces étudiées sont-elles les seules dont les génératrices coniques soient partagées homographiquement par les courbes conjuguées?

Supposons qu'une surface jouisse de cette propriété; on pourra mettre ses équations sous la forme

$$(12) \quad \begin{cases} x = \frac{N_1}{N} = \frac{P_1(\lambda)\mu^2 + 2Q_1(\lambda)\mu + R_1(\lambda)}{P(\lambda)\mu^2 + 2Q(\lambda)\mu + R(\lambda)}, \\ y = \frac{N_2}{N} = \frac{P_2\mu^2 + 2Q_2\mu + R_2}{P\mu^2 + 2Q\mu + R}, \\ z = \frac{N_3}{N} = \frac{P_3\mu^2 + 2Q_3\mu + R_3}{P\mu^2 + 2Q\mu + R}, \end{cases}$$

les lignes  $\lambda = \text{const.}$  étant les coniques, et les courbes  $\mu = \text{const.}$  leurs conjuguées. On alors identiquement

$$\begin{vmatrix} N & N_1 & N_2 & N_3 \\ \frac{\partial N}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_1}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial \lambda \partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit, comme plus haut, que l'on peut poser

$$\frac{\partial N_i}{\partial \lambda} = \alpha N_i + \beta \frac{\partial N_i}{\partial \mu} + \gamma \frac{\partial^2 N_i}{\partial \lambda \partial \mu},$$

$\alpha, \beta, \gamma$  étant trois fonctions convenablement choisies de  $\lambda$  et  $\mu$ .

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation du plan tangent en un point de la surface (12), savoir

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ N & N_1 & N_2 & N_3 \\ \frac{\partial N}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle est en général du quatrième degré par rapport à  $\mu$ , elle devient

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ N & N_1 & N_2 & N_3 \\ \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_1}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial \lambda \partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière n'est plus que du troisième degré en général; cela prouve que, si les coniques sont partagées homographiquement par leurs conjuguées, la développable circonscrite à la surface le long de chacune d'elles est de troisième classe au plus, au lieu d'être de quatrième classe comme dans le cas général. On en déduit aisément que deux coniques infiniment voisines se rencontrent en un point et, par suite, que les coniques ont une enveloppe. Si l'on appelle  $x_0(\lambda)$ ,  $y_0(\lambda)$ ,  $z_0(\lambda)$  les coordonnées d'un point quelconque de cette enveloppe, une transformation homographique effectuée sur la variable  $\mu$  permettra de mettre les équations de la surface sous la forme

$$(13) \quad \begin{cases} x = \frac{N_1}{N} = \frac{1}{1+\mu^2} \left( x_0 + 2u \frac{dx_0}{d\lambda} \mu + u_1 \mu^2 \right), \\ y = \frac{N_2}{N} = \frac{1}{1+\mu^2} \left( y_0 + 2u \frac{dy_0}{d\lambda} \mu + u_2 \mu^2 \right), \\ z = \frac{N_3}{N} = \frac{1}{1+\mu^2} \left( z_0 + 2u \frac{dz_0}{d\lambda} \mu + u_3 \mu^2 \right), \end{cases}$$

où  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  sont des fonctions quelconques de  $\lambda$ . Toutefois, cela suppose que les coniques en question ne sont pas des paraboles, les

racines de  $1 + \mu^2$  ne pouvant être égales; on traiterait aisément ce cas particulier.

Formons, au moyen de ces équations, l'équation différentielle des conjuguées; c'est

$$(14) \quad B \frac{d\mu}{d\lambda} = A,$$

en posant

$$A = -au^2\mu^3 + b\mu^2 + au^2\mu + cu,$$

$$B = fu\mu - 2cu^2,$$

$a, b, c, f$  désignant certaines fonctions de  $\lambda$ ; on a, en particulier,

$$c = \begin{vmatrix} x_0 - u_1 & y_0 - u_2 & z_0 - u_3 \\ \frac{dx_0}{d\lambda} & \frac{dy_0}{d\lambda} & \frac{dz_0}{d\lambda} \\ \frac{d^2x_0}{d\lambda^2} & \frac{d^2y_0}{d\lambda^2} & \frac{d^2z_0}{d\lambda^2} \end{vmatrix}.$$

L'équation (14) se réduira à une équation de Riccati, et, par suite, les coniques seront partagées homographiquement par leurs conjuguées si les deux polynômes  $A$  et  $B$ , qui sont respectivement du troisième et du premier degré par rapport à  $\mu$ , sont divisibles l'un par l'autre. Cela arrive dans les deux cas suivants :

1°  $c = 0$ .  $A$  et  $B$  renferment  $\mu$  en facteur. — Cette relation montre que le plan de la conique variable qui a pour équation

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0,$$

avec les conditions

$$l(x_0 - u_1) + m(y_0 - u_2) + n(z_0 - u_3) = 0,$$

$$l \frac{dx_0}{d\lambda} + m \frac{dy_0}{d\lambda} + n \frac{dz_0}{d\lambda} = 0,$$

est le plan osculateur à l'enveloppe, puisque l'on a aussi

$$l \frac{d^2x_0}{d\lambda^2} + m \frac{d^2y_0}{d\lambda^2} + n \frac{d^2z_0}{d\lambda^2} = 0.$$

2°  $c$  n'est pas nul, et  $A$  est divisible par  $B$ . — On a alors

$$A = B \left( \alpha\mu^2 + \beta\mu - \frac{1}{2u} \right),$$

$\alpha$  et  $\beta$  désignant deux fonctions de  $\lambda$  convenablement choisies. La valeur ainsi obtenue pour  $\frac{d\mu}{d\lambda}$ , savoir

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \theta = \alpha\mu^2 + \beta\mu - \frac{1}{2u},$$

doit vérifier l'équation différentielle des conjuguées des coniques. Si l'on rend  $N, N_1, N_2, N_3$  homogènes par l'introduction d'une seconde variable  $\nu$ , cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N}{\partial \nu} & \frac{\partial N}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda \partial \mu} + \theta \frac{\partial^2 N}{\partial \mu^2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \nu} & \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 N_1}{\partial \lambda \partial \mu} + \theta \frac{\partial^2 N_1}{\partial \mu^2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \nu} & \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial \lambda \partial \mu} + \theta \frac{\partial^2 N_2}{\partial \mu^2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \nu} & \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial \lambda \partial \mu} + \theta \frac{\partial^2 N_3}{\partial \mu^2} \end{vmatrix} = 0,$$

et elle est vérifiée identiquement si l'on y remplace  $\theta$  par sa valeur. Multiplions la première colonne par  $\frac{1}{u\mu} - \alpha\mu - \beta$ , la seconde par  $\alpha$ , la troisième par  $-\frac{2}{\mu}$ , et ajoutons à la quatrième. On démontre facilement l'identité

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{u\mu} - \alpha\mu - \beta \right) \frac{\partial N_i}{\partial \mu} + \alpha \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - \frac{2}{\mu} \frac{\partial N_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial \lambda \partial \mu} + \left( \alpha\mu^2 + \beta\mu - \frac{1}{2u} \right) \frac{\partial^2 N_i}{\partial \mu^2} \\ & = \alpha \frac{\partial^2 N_i}{\partial \nu^2} - \beta \frac{\partial^2 N_i}{\partial \mu \partial \nu} + \frac{1}{2u} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \mu^2} + \frac{1}{u\mu} \left( \frac{\partial N_i}{\partial \mu \partial \nu} - u \frac{\partial^2 N_i}{\partial \lambda \partial \nu} \right). \end{aligned}$$

Sous cette forme, il est aisé de voir que le second membre est indépendant de  $\mu$  : désignons-le par  $X_i$ . Nous remplaçons l'identité précédente par

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial N}{\partial \nu} & \frac{\partial N_1}{\partial \nu} & \frac{\partial N_2}{\partial \nu} & \frac{\partial N_3}{\partial \nu} \\ \frac{\partial N}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} \\ X(\lambda) & X_1(\lambda) & X_2(\lambda) & X_3(\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$



laquelle montre que le plan tangent à la surface en tous les points d'une même conique ( $\lambda$ ) va passer par un même point de coordonnées  $\frac{X_1}{X}, \frac{X_2}{X}, \frac{X_3}{X}$ .

On peut donc énoncer le théorème suivant :

**THÉOREME.** — *Si les génératrices coniques d'une surface sont partagées homographiquement par leurs conjuguées, ces génératrices admettent pour enveloppe l'arête de rebroussement de la développable engendrée par leurs plans, ou bien il existe un cône circonscrit à la surface le long de chacune d'elles.*

Nous avons supposé dans cette démonstration que les coniques avaient une enveloppe véritable, lorsque nous avons mis leurs équations sous la forme (13); il pourrait se faire que toutes ces courbes eussent un point fixe commun. On examinera facilement ce cas, en reprenant les équations de la génératrice sous la forme

$$x = \frac{u_1\mu + v_1}{1 + \mu^2}, \quad y = \frac{u_2\mu + v_2}{1 + \mu^2}, \quad z = \frac{u_3\mu + v_3}{1 + \mu^2}.$$

Chaque conique passe à l'origine pour  $\mu$  infini.

On démontrera alors qu'il existe un cône circonscrit à la surface le long de chaque conique, ou bien que chacune de ces courbes est tangente, à l'origine, à la génératrice de contact de son plan avec le cône enveloppé par les plans de toutes les coniques. Ces résultats rentrent dans les précédents.

Il résulte du premier théorème démontré que, si l'on connaît une courbe conjuguée des coniques sur la surface étudiée, les autres s'obtiendront au moyen de simples quadratures, et qu'elles seront toutes connues si l'on en connaît trois. Il en résulte aussi que l'on peut supposer les équations de cette surface mises sous la forme

$$(12') \quad x = X + \frac{p_1\mu^2 + 2q_1\mu + r_1}{P\mu^2 + 2Q\mu + R} = X + \frac{n_1}{N}, \quad y = Y + \frac{n_2}{N}, \quad z = Z + \frac{n_3}{N},$$

$X, Y, Z, P, Q, R, p_1, q_1, r_1, \dots$  étant des fonctions de  $\lambda$  telles que les courbes  $\mu = \text{const.}$  soient les courbes conjuguées des coniques  $\lambda = \text{const.}$ ; les coordonnées du sommet du cône sont d'ailleurs  $X,$

Y, Z. Il existe alors entre ces fonctions certaines relations que nous allons chercher. Pour y arriver, nous écrirons que les tangentes aux différentes courbes  $\mu = \text{const.}$  vont passer par le sommet (XYZ) du cône circonscrit, pour une même valeur de  $\lambda$ , puisque ce sont les génératrices de ce cône. Nous obtenons ainsi

$$(15) \quad \frac{N \frac{dX}{d\lambda} + \frac{\partial n_1}{\partial \lambda}}{n_1} = \frac{N \frac{dY}{d\lambda} + \frac{\partial n_2}{\partial \lambda}}{n_2} = \frac{N \frac{dZ}{d\lambda} + \frac{\partial n_3}{\partial \lambda}}{n_3}.$$

Or les polynômes en  $\mu$  qui figurent comme dénominateurs dans ces identités ne peuvent avoir une racine commune; il faut donc que les numérateurs soient divisibles par les dénominateurs. D'ailleurs, si l'on multiplie les fonctions  $N, n_1, n_2, n_3$  par un même facteur  $\theta(\lambda)$ , on ne modifie pas la surface engendrée, et l'on peut disposer de ce facteur  $\theta$  de façon à faire disparaître le coefficient de  $\mu^2$  dans le premier numérateur;  $\theta$  est déterminé par l'équation

$$\theta P \frac{dX}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda}(\theta p_1) = 0.$$

Le même terme doit disparaître dans les autres numérateurs, qui deviennent aussi du premier degré. On aurait alors, avec les fonctions  $P, Q, R, p_1, q_1, r_1, \dots$  ainsi modifiées, des identités de la forme

$$(16) \quad \frac{a_1\mu + b_1}{p_1\mu^2 + 2q_1\mu + r_1} = \frac{a_2\mu + b_2}{p_2\mu^2 + 2q_2\mu + r_2} = \frac{a_3\mu + b_3}{p_3\mu^2 + 2q_3\mu + r_3}.$$

Multiplions les numérateurs par des fonctions de  $\lambda$  indéterminées. Soient  $\alpha, \beta, \gamma$ ; posons

$$\alpha(a_1\mu + b_1) + \beta(a_2\mu + b_2) + \gamma(a_3\mu + b_3) = 0,$$

ce qui détermine ces fonctions. On devrait avoir aussi

$$\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 = 0.$$

Or ceci est impossible, car le cône circonscrit ne serait pas un véritable cône. Par suite, les numérateurs sont nuls dans (16) et dans (15) avec les nouvelles fonctions  $P, Q, R, \dots$ . On a donc identiquement

$$(17) \quad \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + N \frac{dX}{d\lambda} = 0, \quad \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + N \frac{dY}{d\lambda} = 0, \quad \frac{\partial n_3}{\partial \lambda} + N \frac{dZ}{d\lambda} = 0.$$

Ce sont les relations cherchées qui sont équivalentes à

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{d\lambda} + P \frac{dX}{d\lambda} &= 0, & \frac{dq_1}{d\lambda} + Q \frac{dX}{d\lambda} &= 0, & \frac{dr_1}{d\lambda} + R \frac{dX}{d\lambda} &= 0, \\ \frac{dp_2}{d\lambda} + P \frac{dY}{d\lambda} &= 0, & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \frac{dp_3}{d\lambda} + P \frac{dZ}{d\lambda} &= 0, & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \end{aligned}$$

Nous dirons que les équations (12') sont mises sous la forme réduite si ces relations sont vérifiées. On voit qu'elles fournissent les différents coefficients au moyen de simples quadratures, si l'on choisit arbitrairement P, Q, R, X, Y, Z.

A cette forme on en peut adjoindre une autre

$$(18) \quad x = \frac{P_1 \mu^2 + 2 Q_1 \mu + R_1}{P \mu^2 + 2 Q \mu + R} = \frac{N_1}{N}, \quad y = \frac{N_2}{N}, \quad z = \frac{N_3}{N},$$

avec les relations identiques

$$(19) \quad \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} = X \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} = Y \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} = Z \frac{\partial N}{\partial \lambda},$$

que l'on déduit aisément des précédentes, car  $N_i = NX + n_i, \dots$

On vérifie facilement, en partant de l'une ou l'autre de ces formes réduites, que les trois coordonnées d'un point quelconque de la surface sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \lambda \partial \mu} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \left( \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = 0.$$

Enfin des raisonnements analogues effectués au moyen de coordonnées homogènes permettraient d'exprimer ces coordonnées sous la forme

$$x_i = \varphi_i(\lambda, \mu) = P_i \mu^2 + 2 Q_i \mu + R_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les fonctions  $P_i, Q_i, R_i$  vérifiant les relations

$$\frac{dP_i}{dP} = \frac{dQ_i}{dQ} = \frac{dR_i}{dR} = X_i,$$

$X_i$  désignant les coordonnées homogènes du sommet du cône circonscrit et P, Q, R trois fonctions de  $\lambda$  arbitrairement choisies.

## Applications des formes réduites.

Une conique étant représentée par les équations

$$(20) \quad x = \frac{N_1(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)}, \quad y = \frac{N_2(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)}, \quad z = \frac{N_3(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)},$$

où l'on suppose  $\lambda$  constant, la conique infiniment voisine le sera par

$$\begin{aligned} x &= \frac{N_1(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} + d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{N_1}{N} \right) + \frac{d\lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left( \frac{N_1}{N} \right) + \dots, \\ y &= \frac{N_2(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} + d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{N_2}{N} \right) + \frac{d\lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left( \frac{N_2}{N} \right) + \dots, \\ z &= \frac{N_3(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} + d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{N_3}{N} \right) + \frac{d\lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left( \frac{N_3}{N} \right) + \dots \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte des relations (17) et (19),

$$(21) \quad \begin{cases} x = \frac{N_1(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} - \frac{n_1(\lambda, \rho)}{N^2} \frac{\partial N}{\partial \lambda} d\lambda - \left[ \frac{\partial N}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{n_1}{N^2} \right) + \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda^2} \frac{n_1}{N^2} \right] \frac{d\lambda^2}{2} + \dots, \\ y = \frac{N_2(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} - \frac{n_2(\lambda, \rho)}{N^2} \frac{\partial N}{\partial \lambda} d\lambda - \left[ \frac{\partial N}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{n_2}{N^2} \right) + \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda^2} \frac{n_2}{N^2} \right] \frac{d\lambda^2}{2} + \dots, \\ z = \frac{N_3(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} - \frac{n_3(\lambda, \rho)}{N^2} \frac{\partial N}{\partial \lambda} d\lambda - \left[ \frac{\partial N}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{n_3}{N^2} \right) + \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda^2} \frac{n_3}{N^2} \right] \frac{d\lambda^2}{2} + \dots \end{cases}$$

Si l'on donne à  $\rho$  dans ces dernières relations les valeurs  $\mu$ , racines de  $\frac{\partial N(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0$ , on voit que les valeurs de  $x, y, z$  se réduisent, aux infiniment petits près du second ordre, aux valeurs correspondantes fournies par les équations (20). Donc, toute conique est rencontrée en deux points par la conique infiniment voisine, et les valeurs correspondantes de  $\mu$  sont données par l'équation

$$(22) \quad \frac{dP}{d\lambda} \mu^2 + 2 \frac{dQ}{d\lambda} \mu + \frac{dR}{d\lambda} = 0.$$

Cette équation définit deux courbes tracées sur la surface et tangentes à toutes les génératrices coniques. On voit, de plus, que les infiniment petits du second ordre ne disparaissent dans les expressions (21) que si la racine de  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$  annule aussi  $\frac{\partial^2 N}{\partial \lambda^2}$ ; cela ne peut avoir

lieu constamment, à moins que cette racine ne soit constante ou qu'elle ne soit racine double de  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ .

Dans le premier cas, les coniques passent par un point fixe; en effet, si  $k$  est cette racine constante, on a

$$\frac{d}{d\lambda} N(\lambda, k) = 0$$

et, par suite,

$$\frac{d}{d\lambda} N_1(\lambda, k) = 0, \quad \dots$$

Intégrant, il vient

$$N(\lambda, k) = a, \quad N_1(\lambda, k) = a_1, \quad \dots$$

Les coniques passent par le point de coordonnées  $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \frac{a_3}{a}$ , que l'on obtient sur toutes en donnant au paramètre  $\mu$  la valeur  $k$ . Réciproquement, si les coniques passent par un point fixe, l'équation (22) a une racine constante. Elle a ses deux racines constantes si les coniques passent par deux points fixes.

Dans le second cas, les deux courbes enveloppes des coniques sont confondues et la conique variable est osculatrice à son enveloppe.

De même que les coniques roulent sur deux courbes, les cônes roulent sur deux développables. Les plans tangents à un cône menés par la tangente ST à la trajectoire du sommet correspondent à des valeurs de  $\mu$ , racines de l'équation

$$(23) \quad \begin{vmatrix} \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \mu} & \frac{\partial n_2}{\partial \mu} & \frac{\partial n_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \nu} & \frac{\partial n_2}{\partial \nu} & \frac{\partial n_3}{\partial \nu} \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on obtient en écrivant qu'un plan tangent

$$(24) \quad \begin{vmatrix} x - X & y - Y & z - Z \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{\partial n_1}{\partial \mu} & \frac{\partial n_2}{\partial \mu} & \frac{\partial n_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0$$

est parallèle à ST. Il est aisé de montrer que chacun de ces plans a

pour caractéristique la génératrice suivant laquelle il touche le cône; ce sont donc ces génératrices SH et SH' qui engendrent les deux développables en question.

Si cette équation (23) a une ou deux racines constantes, les cônes roulent sur un ou deux plans fixes.

Lorsque les coniques restent tangentes à un plan fixe, les cônes ne sont pas forcément tangents à ce plan. Il peut se présenter deux cas : 1° les cônes circonscrits sont tangents au plan sur lequel roulent les coniques; 2° une des courbes enveloppes des coniques se confond avec la courbe décrite par le point de contact de la conique variable avec le plan fixe. En particulier, si la conique est une parabole, il existe un cylindre circonscrit, à moins que la droite d'intersection des plans de deux paraboles infiniment voisines ne soit un diamètre; par exemple, la surface engendrée par une parabole osculatrice à une courbe gauche quelconque, et soumise à une condition complémentaire arbitrairement choisie, admet un cylindre circonscrit le long de chaque génératrice.

Si l'on remarque que les surfaces étudiées donnent naissance à d'autres surfaces semblables lorsqu'on les soumet à une transformation par polaires réciproques, et que cette transformation conserve les propriétés des systèmes conjugués, on voit que les équations tangentielles de ces surfaces doivent avoir une forme analogue à celle des équations ponctuelles, lorsqu'on les suppose rapportées au même système de courbes composé des coniques et de leurs conjuguées.

Les coordonnées du plan tangent sont fournies par le développement de l'équation (24). On peut les supposer mises sous la forme

$$(25) \quad u = \frac{M_1}{M}, \quad v = \frac{M_2}{M}, \quad w = \frac{M_3}{M},$$

M, M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, M<sub>3</sub> désignant les dérivées partielles par rapport à m, m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub>, m<sub>3</sub> du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial N}{\partial \nu} & \frac{\partial N_1}{\partial \nu} & \frac{\partial N_2}{\partial \nu} & \frac{\partial N_3}{\partial \nu} \\ F & FX & FY & FZ \\ m & m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}$$

et  $F$  une fonction de  $\lambda$  arbitrairement choisie. Si l'on suppose cette fonction déterminée par la condition

$$(26) \quad \frac{dF}{d\lambda} + U \frac{d}{d\lambda}(FX) + V \frac{d}{d\lambda}(FY) + W \frac{d}{d\lambda}(FZ) = 0,$$

$U, V, W$  désignant les coordonnées du plan de la conique

$$Ux + Vy + Wz + 1 = 0,$$

on a les relations identiques

$$(27) \quad \frac{\partial M_1}{\partial \lambda} = U \frac{\partial M}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial M_2}{\partial \lambda} = V \frac{\partial M}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial M_3}{\partial \lambda} = W \frac{\partial M}{\partial \lambda}.$$

Quant à l'équation  $\frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0$ , ce n'est autre chose, à un facteur près indépendant de  $\mu$ , que l'équation (23).

*Applications.* — Les équations générales que nous avons trouvées soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles, renferment cinq fonctions arbitraires d'un paramètre variable. La détermination de ces fonctions de manière à satisfaire à des conditions géométriques particulières présente évidemment de grandes difficultés. Nous allons cependant étudier le problème suivant :

*Trouver toutes les surfaces pour lesquelles on donne la courbe lieu des sommets et la développable enveloppe des plans des coniques, avec la correspondance entre les sommets et les plans.*

On se donne les fonctions  $X, Y, Z, U, V, W$  d'un même paramètre  $\lambda$ . Les inconnues  $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, \dots$  qui figurent dans les équations ponctuelles

$$x = \frac{P_1\mu^2 + 2Q_1\mu + R_1}{P\mu^2 + 2Q\mu + R} = \frac{N_1}{N}, \quad \dots,$$

avec les relations identiques

$$\frac{\partial N_1}{\partial \lambda} = X \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} = Y \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} = Z \frac{\partial N}{\partial \lambda},$$

sont encore reliées aux quantités données par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} P + UP_1 + VP_2 + WP_3 = 0, \\ Q + UQ_1 + VQ_2 + WQ_3 = 0, \\ R + UR_1 + VR_2 + WR_3 = 0. \end{cases}$$

Si l'on annule successivement les trois premières dérivées de chacune de ces équations, l'élimination des fonctions inconnues autres que  $P, Q, R$  montre que ces dernières sont trois intégrales d'une même équation

$$(2) \quad A \frac{d^3 \theta}{d\lambda^3} + B \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + C \frac{d\theta}{d\lambda} + D\theta = 0,$$

où  $A, B, C, D$  sont des fonctions déterminées de  $X, Y, Z, U, V, W$  et leurs dérivées. D'ailleurs,  $P, Q, R$  étant choisis de cette façon,  $P_1, Q_1, R_1, \dots$  seront déterminés par des équations linéaires.

Soient donc  $P, Q, R$  trois intégrales de (2); l'intégrale générale est fournie par

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= a P + b Q + c R, \\ \mathcal{Q} &= a_1 P + b_1 Q + c_1 R, \\ \mathcal{R} &= a_2 P + b_2 Q + c_2 R. \end{aligned}$$

Combinant avec les équations précédentes, on trouve

$$\mathcal{P}_1 = a P_1 + b Q_1 + c R_1, \quad \mathcal{P}_2 = a P_2 + b Q_2 + c R_2, \quad \dots$$

La solution la plus générale, savoir

$$x = \frac{(aP_1 + bQ_1 + cR_1)\mu^2 + 2(a_1P_1 + b_1Q_1 + c_1R_1)\mu + a_2P_1 + b_2Q_1 + c_2R_1}{(aP + bQ + cR)\mu^2 + 2(a_1P + b_1Q + c_1R)\mu + a_2P + b_2Q + c_2R}, \quad \dots,$$

renferme donc neuf constantes arbitraires,  $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ .

Mais on peut ramener le nombre des paramètres arbitraires à cinq par une substitution homographique à coefficients constants effectuée sur la variable  $\mu$ , de sorte que la surface la plus générale dépend seulement de cinq paramètres. Le choix d'une conique particulière dans l'un des plans donnés, ou d'un cône ayant son sommet en l'un des points donnés, achèvera de la déterminer.



### Étude de quelques surfaces particulières.

Nous distinguerons d'abord les surfaces (A) enveloppes de cônes qui roulent sur deux plans fixes en restant soumis à trois conditions complémentaires quelconques. Les conjuguées des coniques sont les sections planes faites dans la surface par un faisceau de plans ayant pour axe la droite des sommets. Réciproquement, si deux conjuguées sont planes, les sommets des cônes sont en ligne droite et la surface rentre dans cette catégorie particulière.

Une transformation par polaires réciproques effectuée sur les surfaces (A) fournit les surfaces (B) engendrées par des coniques qui passent par deux points fixes  $F$  et  $F'$  en restant assujetties à trois conditions complémentaires quelconques. Les courbes conjuguées sont les courbes de contact de la surface avec des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur  $FF'$ ; leur détermination n'exige donc encore aucune quadrature.

Une surface (C) peut appartenir à la fois à ces deux catégories; les coniques sont tangentes à deux plans fixes et passent par deux points fixes qui peuvent être ou non les points de contact avec les plans tangents fixes.

Plus particulièrement encore, les coniques peuvent être tangentes à une droite fixe en un point fixe, ou les cônes à un plan fixe le long d'une génératrice fixe; les conjuguées des coniques s'obtiennent toujours sans intégration.

Les surfaces (D), pour lesquelles la courbe  $\Sigma$  lieu des sommets des cônes est plane, possèdent des conjuguées de coniques qui s'obtiennent par une quadrature, car on en connaît déjà deux: ce sont les courbes enveloppes des génératrices d'intersection de ces cônes avec le plan de  $\Sigma$ .

Il en est de même pour les surfaces (E) qu'on en déduit dans une transformation par polaires réciproques, c'est-à-dire pour lesquelles les plans des coniques passent par un point fixe; les conjuguées connues sont, dans ce cas, les courbes engendrées par les points de contact de la conique variable avec les deux tangentes issues du point fixe.

C'est dans les catégories (B) et (C) qu'il faut ranger les surfaces du

troisième et du quatrième degré qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du deuxième degré. Une surface du troisième degré possède deux points coniques  $F$  et  $F'$  par lesquels passent les coniques génératrices; la droite  $FF'$  appartient naturellement à la surface et le plan tangent est le même en tous les points de cette droite. D'ailleurs, si une surface du troisième degré touche un plan suivant une droite, les plans qui passent par cette dernière découpent sur la surface des coniques la rencontrant en deux points fixes. Quatre de ces coniques se décomposent en systèmes de deux droites; ces huit droites passent quatre à quatre en  $F$  et  $F'$  et constituent l'intersection de la surface avec les cônes tangents en ces points.

Les conjuguées des coniques sont les courbes de contact de la surface avec les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur  $FF'$ ; ces cônes sont du quatrième ordre et les conjuguées sont des quartiques gauches de première espèce. Chacune ( $\Gamma$ ) est l'intersection de la surface proposée avec un cône du second degré qui passe par  $FF'$  et est tangent à la surface le long de cette droite; le sommet  $O$  de ce nouveau cône et le sommet  $O$  du cône circonscrit correspondant forment une involution dont les points doubles sont  $F$  et  $F'$ . Chaque courbe ( $\Gamma$ ) rencontre  $FF'$  en deux points variables conjugués harmoniques par rapport au sommet  $O$  correspondant et au point fixe où la droite  $FF'$  est rencontrée par la seconde droite d'intersection de la surface avec le plan tangent suivant  $FF'$ . Les cônes de tangentes aux deux points coniques ne peuvent se réduire simultanément à deux plans, à moins que le plan tangent le long de  $FF'$  ne coupe la surface suivant cette seule droite. La courbe lieu des sommets des cônes circonscrits suivant les coniques est une quartique gauche de seconde espèce qui ne rencontre jamais  $FF'$ , à moins que les deux points coniques ne soient confondus.

Plus généralement, une surface d'ordre  $n$  présentant une droite multiple d'ordre  $n - 2$  est coupée suivant une conique par tout plan qui passe par cette droite. Il existera des cônes circonscrits si ces coniques rencontrent la droite multiple en deux points fixes  $F$  et  $F'$ ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les  $n - 2$  plans tangents à la surface en tous les points de  $FF'$  soient invariables.  $2n - 2$  coniques se décomposent en deux droites: ces  $4n - 4$  droites se groupent  $2n - 2$  à  $2n - 2$  pour former l'intersection de la surface avec les cônes de tan-

gentes en ses points coniques. Les conjuguées ( $\Gamma$ ) des coniques sont des courbes gauches d'ordre  $2n - 2$  suivant lesquelles la surface est touchée par des cônes circonscrits de même ordre ayant leurs sommets  $O$  sur  $FF'$ ; chacune est l'intersection de la surface avec un cône d'ordre  $n - 1$  qui lui est tangent suivant les  $n - 2$  nappes le long de  $FF'$ . Les sommets  $O'$  de ces nouveaux cônes et les sommets  $O$  correspondants forment une involution dont les points doubles sont  $F$  et  $F'$ . Enfin chaque courbe ( $\Gamma$ ) rencontre  $FF'$  en  $2n - 4$  points variables qui se partagent en  $n - 2$  couples; chacun de ces couples est situé sur une nappe différente de la surface donnée et les deux points d'un même couple sont conjugués harmoniques par rapport au sommet  $O$  du cône correspondant et au point de rencontre de  $FF'$  avec la seconde droite d'intersection de la surface avec son plan tangent le long de la nappe à laquelle appartient le couple. La courbe lieu des sommets des cônes circonscrits est une courbe unicursale d'ordre  $3n - 5$ .

Les coniques génératrices de la surface peuvent être tangentes en deux points fixes à deux plans fixes; dans ce cas, les plans tangents à la surface le long de la droite multiple la coupent suivant cette seule droite. Il existe alors une triple infinité de quadriques tangentes à la surface proposée en  $F$  et  $F'$  et qui la coupent suivant  $n$  coniques; parmi ces quadriques, il y en a une double infinité qui touchent la surface proposée suivant une conique et la coupent encore suivant  $n - 2$  coniques; enfin, parmi celles-ci, il y a une simple infinité de cônes jouissant de la même propriété: ce sont les cônes circonscrits à la surface le long de ses coniques.

Une surface du quatrième degré possédant une droite double avec deux plans tangents fixes le long de cette droite rentre dans la catégorie que nous venons d'examiner. En dehors de celle-là, les seules surfaces du quatrième degré possédant le même mode de génération sont des surfaces à conique double et deux points doubles au moins, ou les surfaces ayant deux points d'embrassement.

Considérons d'abord une surface présentant une conique double et deux points doubles dont la ligne de jonction ne rencontre pas cette conique. Tout plan passant par les points doubles  $F$  et  $F'$  coupe la surface suivant deux coniques qui se rencontrent en ces deux points. Les conjuguées des coniques sont les courbes de contact de la surface avec

von Flächen 5, Ordnung; Göttingen, in der Dieterichschen Buchhandlung, 1870).

Les quadriques du faisceau

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$

y découpent une série de coniques dont les plans ont pour équation

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$$

et enveloppent le cône

$$B^2 - AC = 0.$$

Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que deux coniques infiniment voisines se rencontrent en deux points est que le point

$$A = B = C = 0$$

soit l'un des sommets du tétraèdre conjugué par rapport aux deux quadriques  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ . Le cône enveloppe des plans des coniques passe alors par la quartique double, qui est elle-même l'enveloppe des coniques de la surface; les cordes de contact sont les génératrices du cône. La quartique est une courbe de rebroussement pour la surface. L'équation pourra se mettre sous la forme

$$x\varphi^2 + 2z\varphi\psi + y\psi^2 = 0,$$

en posant

$$\psi = a\varphi + z^2 - xy,$$

$a$  désignant une constante quelconque et  $\varphi$  une fonction quadratique.

Le lieu des sommets des cônes circonscrits est une courbe plane  $\Sigma$  unicursale de quatrième ordre, dont le plan est le plan conjugué du sommet du cône par rapport à la quartique, c'est-à-dire  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ .

On connaît déjà deux courbes conjuguées des coniques; ce sont les enveloppes des génératrices des cônes situées dans le plan de  $\Sigma$ . La recherche des autres se ramène donc à une quadrature; on vérifie que cette opération conduit en général à des intégrales hyperelliptiques.

**Surfaces enveloppes de cônes de révolution.**

Reprenons les équations générales

$$(1) \quad x = X + \frac{n_1}{N}, \quad y = Y + \frac{n_2}{N}, \quad z = Z + \frac{n_3}{N},$$

avec les relations

$$(2) \quad \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} = -N \frac{dX}{d\lambda}, \quad \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} = -N \frac{dY}{d\lambda}, \quad \frac{\partial n_3}{\partial \lambda} = -N \frac{dZ}{d\lambda}.$$

Si les cônes sont de révolution, chacun d'eux étant représenté par les équations

$$\frac{x-X}{n_1} = \frac{y-Y}{n_2} = \frac{z-Z}{n_3},$$

où l'on suppose  $\lambda$  constant, c'est que l'on a, quel que soit  $\mu$ , en supposant les axes de coordonnées rectangulaires,

$$(3) \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3)^2,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  désignant des fonctions de  $\lambda$ , que l'on peut supposer réelles si les cônes le sont eux-mêmes. Différentions cette relation par rapport à  $\lambda$ , en tenant compte de (2); nous obtenons

$$\begin{aligned} & -N \left( n_1 \frac{dX}{d\lambda} + n_2 \frac{dY}{d\lambda} + n_3 \frac{dZ}{d\lambda} \right) \\ & = (\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3) \left[ n_1 \frac{d\alpha}{d\lambda} + n_2 \frac{d\beta}{d\lambda} + n_3 \frac{d\gamma}{d\lambda} - N \left( \alpha \frac{dX}{d\lambda} + \beta \frac{dY}{d\lambda} + \gamma \frac{dZ}{d\lambda} \right) \right]. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que les racines du polynôme  $\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3$ , qui est du second degré en  $\mu$ , appartiennent aux deux polynômes  $N$  et  $n_1 \frac{dX}{d\lambda} + n_2 \frac{dY}{d\lambda} + n_3 \frac{dZ}{d\lambda}$ ; or, en vertu de (3), les racines du premier sont imaginaires, elles doivent donc appartenir toutes deux à l'un des deux derniers.

Par suite, on a

$$(4) \quad \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 = AN$$

ou bien

$$(5) \quad \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 = B \left( n_1 \frac{dX}{d\lambda} + n_2 \frac{dY}{d\lambda} + n_3 \frac{dZ}{d\lambda} \right),$$

A et B désignant deux fonctions de  $\lambda$ .

Dans le premier cas, l'égalité (3) donne

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = A^2 N^2$$

et, par suite,

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = A^2.$$

Cette nouvelle relation nous montre que les coniques (1) sont des cercles, et la surface engendrée est une surface enveloppe de sphères dépendant d'un paramètre.

Dans le second cas, on montre aisément que l'on a

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dX}{d\lambda} = \frac{1}{\beta} \frac{dY}{d\lambda} = \frac{1}{\gamma} \frac{dZ}{d\lambda},$$

c'est-à-dire que l'axe du cône de révolution n'est autre chose que la tangente à la trajectoire de son sommet.

Les surfaces enveloppes de cônes de révolution se partagent donc en deux classes :

1° Les surfaces enveloppes de sphères; l'axe du cône admet pour enveloppe la courbe décrite par le centre de la sphère variable.

2° Les surfaces pour lesquelles l'axe du cône reste constamment tangent à la trajectoire de son sommet.

Ces résultats peuvent d'ailleurs se démontrer sans avoir recours aux équations générales (1), et un calcul direct permet de montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône de révolution touche son enveloppe suivant une conique, c'est que son axe engendre une développable; suivant que le point de contact de chaque axe avec son enveloppe est ou non le sommet du cône, on obtient l'une ou l'autre des catégories précédentes.

Les surfaces de la seconde classe sont d'ailleurs étroitement liées aux surfaces de la première. Considérons, en effet, une surface enveloppe de sphères; les normales à cette surface le long d'un cercle ( $c$ ) engendrent un cône de révolution ( $C$ ) dont le sommet  $S$  est un centre

de courbure de la surface pour tous les points de  $(c)$ . Les centres de seconde courbure sont les points de contact des génératrices de  $(C)$  avec l'enveloppe de ce cône; or on sait que ces centres de courbure sont sur une conique; par suite, la surface lieu des centres de seconde courbure rentre dans la seconde classe.

On peut encore remarquer que les conjuguées des coniques sont les trajectoires orthogonales des cercles pour les surfaces de la première classe, et l'on sait que ces courbes partagent les cercles homographiquement. Pour les surfaces de la seconde classe, ce sont les courbes de contact des développables engendrées par les normales aux surfaces de première classe correspondantes le long de leurs lignes de seconde courbure; comme celles-ci, elles dépendent donc d'une équation de Riccati. On trouve cette équation, sous une forme très simple, de la façon suivante. Appelons

$x, y, z$  les coordonnées d'un point quelconque de la surface;

$X, Y, Z$  les coordonnées du sommet du cône correspondant;

$V$  l'angle générateur de ce cône;

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  les cosinus directeurs de la tangente, la normale principale et la binormale à la trajectoire du sommet;

$\omega$  et  $\varpi$  la courbure et la torsion de cette courbe;

$\varphi$  l'angle d'un plan passant par le point  $(x, y, z)$  et l'axe du cône avec le plan osculateur de la trajectoire (cet angle peut varier de 0 à  $2\pi$ ).

On trouve

$$\begin{aligned} \frac{x - X}{\alpha \cot V + \alpha_1 \cos \varphi + \alpha_2 \sin \varphi} &= \frac{y - Y}{\beta \cot V + \beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \sin \varphi} \\ &= \frac{z - Z}{\gamma \cot V + \gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi} = \frac{\sin^2 V}{\omega \cos \varphi + \frac{dV}{ds}}, \end{aligned}$$

et l'équation différentielle des conjuguées est

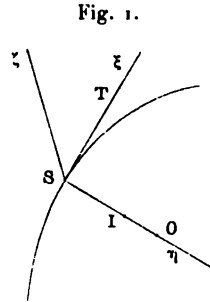
$$\frac{d\varphi}{ds} = \varpi + \omega \cot V \sin \varphi,$$

la variable indépendante étant l'arc  $s$  de la trajectoire du sommet.

Cette équation se ramène immédiatement à une équation de Riccati,

en prenant pour fonction  $\tan \frac{\varphi}{2}$ . Elle s'intègre par une quadrature si la trajectoire du sommet est plane ou, plus généralement, si le rapport  $\frac{\omega \tan V}{\omega}$  est constant.

Si l'on prend (*fig. 1*) pour axes de coordonnées ( $S, \xi, \eta, \zeta$ ) les axes



du trièdre de la trajectoire, l'équation du plan de la conique s'écrit

$$\tan V \frac{dV}{ds} \xi + \omega \eta - \sin^2 V = 0.$$

On vérifie ainsi que ce plan est parallèle à la binormale de la trajectoire du sommet, ce qui est une propriété connue. Ce plan rencontre la normale principale  $S\eta$  en un point  $I$ , tel que l'on ait

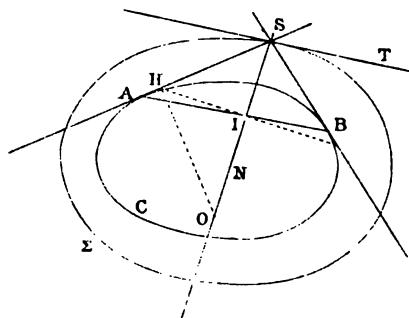
$$SI = SO \sin^2 V,$$

$O$  désignant le centre de courbure de la courbe. Il en résulte une construction géométrique très simple du point  $I$ , étant connus le point  $O$  et l'angle  $V$ , et inversement. Comme application de cette dernière propriété, considérons une quadrique  $Q$ , dont la trace sur l'un de ses plans principaux est une conique  $C$  (*fig. 2*). Cette quadrique peut être regardée comme l'enveloppe d'une famille de cônes de révolution ayant leurs sommets sur une conique  $\Sigma$  située dans le plan de  $C$  et homofocale à cette dernière. Si  $S$  est le sommet de l'un de ces cônes, la tangente à  $\Sigma$  est son axe, les tangentes à  $C$  menées de  $S$  en sont les génératrices de contour apparent; enfin, si, par le point  $I$  où  $AB$  rencontre une normale  $SN$  à  $\Sigma$ , on mène  $IH$  perpendiculaire sur  $SN$ , puis  $HO$  per-



pendiculaire sur SA, on obtient en O le centre de courbure de  $\Sigma$ . Ces différentes propriétés sont des conséquences immédiates des équations écrites plus haut; on pourrait les démontrer ici en s'appuyant uniquement sur ce fait que les deux coniques C et  $\Sigma$  sont homofocales.

Fig. 2.



Dans le cas général, l'angle  $\theta$  du plan de la conique avec l'axe du cône est fourni par l'équation

$$\tan \theta = \tan V \frac{1}{\omega} \frac{dV}{ds}.$$

Par suite, lorsque  $\frac{dV}{ds}$  est supérieur à  $\omega$ , la conique est une ellipse; si  $\frac{dV}{ds}$  est égal à  $\omega$ , la conique est une parabole; et si  $\frac{dV}{ds}$  est moindre que  $\omega$ , la conique est une hyperbole.

Si l'angle générateur du cône est constant, le plan de la conique est perpendiculaire à la normale principale de la trajectoire du sommet, et la conique est une hyperbole qui reste semblable à elle-même dans son déplacement.

Ces surfaces sont les seules, parmi celles que nous étudions, pour lesquelles la congruence formée par les génératrices des cônes se compose des normales à une surface; cette dernière est d'ailleurs une enveloppe de sphères.

Nous remarquerons encore que, si les coniques génératrices sont des cercles, la surface peut être envisagée comme une enveloppe de sphères, ou bien les plans des cercles sont parallèles à un plan fixe; nous avons démontré ce fait dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Acadé-*

*mie des Sciences* (t. CIII, p. 687). On peut généraliser cette propriété et énoncer le théorème suivant :

*Si les génératrices coniques rencontrent une conique fixe, la surface est l'enveloppe d'une famille de quadriques passant par cette conique et assujettie à trois conditions complémentaires, ou bien les coniques passent par deux points fixes sur la conique fixe.*

En particulier, si l'on considère une surface engendrée par un cercle parallèle à un plan fixe, les conjuguées de ces cercles se déduiront les unes des autres par une opération géométrique très simple : ce sont les courbes de contact de la surface avec des cylindres circonscrits ayant leurs génératrices parallèles à une direction arbitrairement choisie dans le plan d'un cercle ; si l'on fait tourner les points de l'une de ces courbes d'un angle constant sur les cercles auxquels ils appartiennent, on obtient les points d'une autre conjuguée.



## SECONDE PARTIE.

### DES LIGNES ASYMPTOTIQUES.



Reprenons les équations générales d'une surface, mises sous forme réduite, savoir

$$x = \frac{N_1}{N} = X + \frac{n_1}{N}, \quad y = \frac{N_2}{N} = Y + \frac{n_2}{N}, \quad z = \frac{N_3}{N} = Z + \frac{n_3}{N},$$

avec les relations identiques

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} &= X \frac{\partial N}{\partial \lambda}, & \dots; \\ \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} &= -N \frac{dX}{d\lambda}, & \dots \end{aligned}$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation différentielle des lignes asymptotiques donne une relation de la forme

$$(1) \quad (A\mu^2 + 2B\mu + C) \left( \frac{dP}{d\lambda} \mu^2 + 2 \frac{dQ}{d\lambda} \mu + \frac{dR}{d\lambda} \right) d\lambda^2 + 2\Delta d\mu^2 = 0,$$

en posant

$$A\mu^2 + 2B\mu + C = \begin{vmatrix} p_1\mu + q_1 & q_1\mu + r_1 & \frac{dX}{d\lambda} \\ p_2\mu + q_2 & q_2\mu + r_2 & \frac{dY}{d\lambda} \\ p_3\mu + q_3 & q_3\mu + r_3 & \frac{dZ}{d\lambda} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît, dans les deux polynômes du second degré par rapport à  $\mu$  qui figurent dans cette équation, les polynômes  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ ; ce dernier, à un facteur près, indépendant de  $\mu$ . On en conclut qu'il existe sur chaque conique quatre points pour lesquels les lignes asymptotiques sont tangentes entre elles et tangentes à une conjuguée de la conique : ce sont les points de rencontre de cette conique avec la conique infiniment voisine (K et K') et les pieds H et H' des génératrices de contact du cône correspondant avec les deux développables circonscrites.

Cette équation se simplifie dans un certain nombre de cas ; nous allons examiner les plus intéressants.

Supposons que le coefficient de  $d\lambda^2$  soit le carré d'un polynôme par rapport à  $\mu$  : l'équation (1) se décompose alors en deux équations de Riccati, et les deux séries de lignes asymptotiques de la surface partagent homographiquement ses génératrices coniques. Ce fait se présente dans les deux cas suivants :

I. Les deux polynômes  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$  ont mêmes racines  $\mu$  ; les points K et K' sont respectivement confondus avec les points H et H'. La surface est engendrée par une conique qui roule sur deux courbes, les cônes circonscrits roulant sur deux développables circonscrites à ces courbes. Nous l'appellerons *surface du premier genre*.

II. Les deux polynômes  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$  ont chacun une racine double ; les

points K et K' sont confondus, ainsi que les points H et H'. On en conclut que la conique génératrice reste osculatrice à une courbe, le cône circonscrit étant lui-même osculateur à une développable. Nous appellerons *surfaces du second genre* celles qui sont engendrées de cette façon.

III. Un autre cas intéressant est celui où les polynômes  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$  ont tous deux leurs racines constantes. La surface est engendrée par une conique qui passe par deux points fixes et reste tangente à deux plans fixes sur lesquels roulent les cônes circonscrits.

Les variables se séparent alors dans l'équation (1), dont l'intégration se trouve ramenée à une quadrature; la détermination des conjuguées s'effectue d'ailleurs, dans ce cas, sans aucune intégration.

Plus particulièrement encore, les deux plans fixes auxquels les coniques sont tangentes peuvent avoir leurs points de contact aux points fixes par lesquels passent les coniques; nous retrouvons ainsi des surfaces singulières du premier genre et le théorème démontré par M. Demartres :

*Une surface engendrée par une conique tangente en deux points fixes à deux plans fixes a ses génératrices coniques partagées homographiquement par ses deux séries de lignes asymptotiques.*

Ces surfaces jouissent encore d'une autre propriété : ce sont les seules qui puissent être regardées comme des enveloppes de quadriques dépendant d'un seul paramètre, et telles que deux quadriques infiniment voisines soient tangentes le long de leur conique d'intersection. La recherche des lignes asymptotiques exige alors l'intégration de deux équations de Riccati dans lesquelles les polynômes du second degré ont leurs racines constantes.

Les trois catégories que nous venons d'indiquer sont encore remarquables, en ce sens qu'une transformation par polaires réciproques les remplace par d'autres surfaces de même espèce.

## Surfaces du premier genre.

Si nous écrivons que les deux polynômes  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$  ont mêmes racines, nous trouvons

$$\frac{1}{\frac{dP}{d\lambda}} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda} \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{dQ}{d\lambda}} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda} \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{dR}{d\lambda}} \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda} \end{vmatrix},$$

relations que l'on remplace aisément par les suivantes :

$$(2) \quad \frac{1}{\frac{dX}{d\lambda}} \left[ \frac{dP}{d\lambda} r_1 - 2 \frac{dQ}{d\lambda} q_1 + \frac{dR}{d\lambda} p_1 \right] = \frac{1}{\frac{dY}{d\lambda}} \left[ \frac{dP}{d\lambda} r_2 - 2 \frac{dQ}{d\lambda} q_2 + \frac{dR}{d\lambda} p_2 \right] = \frac{1}{\frac{dZ}{d\lambda}} \left[ \frac{dP}{d\lambda} r_3 - 2 \frac{dQ}{d\lambda} q_3 + \frac{dR}{d\lambda} p_3 \right].$$

Si l'on sait déterminer toutes les fonctions P, Q, R,  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $r_1$ , ..., X, Y, Z vérifiant ces relations, ainsi que le système

$$(3) \quad \frac{dp_1}{d\lambda} = -P \frac{dX}{d\lambda}, \quad \dots, \quad \frac{dq_1}{d\lambda} = -Q \frac{dX}{d\lambda}, \quad \dots, \quad \frac{dr_1}{d\lambda} = -R \frac{dX}{d\lambda}, \quad \dots,$$

on aura toutes les surfaces du premier genre. Les surfaces générales dépendant de cinq fonctions arbitraires d'un paramètre variable, celles-ci dépendent encore de trois fonctions arbitraires.

Prenons Q pour variable indépendante et posons  $Q = \lambda$ ; choisissons comme fonctions arbitraires P, R, ainsi que la valeur  $\rho$  des rapports (2); il est aisé de voir que les inconnues  $\frac{dX}{d\lambda}$ ,  $\frac{dY}{d\lambda}$ ,  $\frac{dZ}{d\lambda}$  sont trois solutions de l'équation différentielle

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \frac{d^2 P}{d\lambda^2} & \frac{d^2 R}{d\lambda^2} & \rho \\ \frac{d^3 P}{d\lambda^3} & \frac{d^3 R}{d\lambda^3} & \frac{d\rho}{d\lambda} + \varepsilon u \\ \frac{d^4 P}{d\lambda^4} & \frac{d^4 R}{d\lambda^4} & \frac{d^2 \rho}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda}(\varepsilon u) \end{vmatrix} = 0,$$

où la fonction inconnue est  $u$ , et où l'on pose

$$\theta = u \frac{d}{d\lambda} (PR - \lambda^2) + \frac{d}{d\lambda} (\rho u),$$

$$\varepsilon = P \frac{d^2 R}{d\lambda^2} + R \frac{d^2 P}{d\lambda^2}.$$

En particulier, si l'on choisit  $P$  et  $R$  de telle sorte que  $\varepsilon = 0$ , l'équation précédente admet comme intégrale

$$\theta = a \frac{d^2 P}{d\lambda^2} + b \frac{d^2 R}{d\lambda^2},$$

$a$  et  $b$  étant des constantes arbitraires. Il reste alors à intégrer une équation du premier ordre linéaire qui donnera  $u$ ; puis de simples quadratures donneront toutes les fonctions inconnues. Nous aurons ainsi une solution renfermant deux fonctions arbitraires,  $P$  et  $\rho$  par exemple.

On peut encore, au moyen des relations (2), démontrer le théorème suivant :

*Si le lieu des sommets des cônes est une courbe plane, les plans des coniques enveloppent un cône, et réciproquement.*

Ces relations s'écrivent en effet

$$\rho \frac{dX}{d\lambda} = p_1 \frac{dR}{d\lambda} + 2q_1 \frac{dQ}{d\lambda} + r_1 \frac{dP}{d\lambda}, \quad \dots$$

Deux différentiations successives permettent de montrer que l'on a

$$(5) \quad \rho^3 \begin{vmatrix} \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda} \\ \frac{d^2 X}{d\lambda^2} & \frac{d^2 Y}{d\lambda^2} & \frac{d^2 Z}{d\lambda^2} \\ \frac{d^3 X}{d\lambda^3} & \frac{d^3 Y}{d\lambda^3} & \frac{d^3 Z}{d\lambda^3} \end{vmatrix} = 2\Delta \begin{vmatrix} \frac{dP}{d\lambda} & \frac{dQ}{d\lambda} & \frac{dR}{d\lambda} \\ \frac{d^2 P}{d\lambda^2} & \frac{d^2 Q}{d\lambda^2} & \frac{d^2 R}{d\lambda^2} \\ \frac{d^3 P}{d\lambda^3} & \frac{d^3 Q}{d\lambda^3} & \frac{d^3 R}{d\lambda^3} \end{vmatrix}.$$

$\rho$  et  $\Delta$  sont deux fonctions de  $\lambda$  qui ne peuvent être nulles; les deux déterminants figurant dans cette égalité seront donc nuls simultanément.

Si le premier est nul, la trajectoire du sommet est plane, et si le se-

cond l'est, on montre aisément que les plans des coniques passent par un point fixe.

Nous remarquerons encore la propriété générale suivante qui convient aux seules surfaces du premier genre :

*Les tangentes aux deux séries de lignes asymptotiques de la surface en tous les points d'une même conique sont les génératrices de deux hyperboloïdes circonscrits à la surface le long de cette conique.*

Nous allons chercher s'il existe des surfaces du premier genre parmi les surfaces particulières que nous avons étudiées dans la première Partie. Considérons les surfaces enveloppes de cônes de révolution dont la caractéristique est une véritable conique. Nous avons vu que l'équation du plan de cette conique rapportée au trièdre  $(S\xi\eta\zeta)$  de la trajectoire du sommet est

$$(6) \quad \tan V \frac{dV}{ds} \xi + \omega \eta - \sin^2 V \zeta = 0.$$

Son intersection  $KK'$  avec le plan infiniment voisin est définie par cette équation jointe à la suivante :

$$(7) \quad \begin{cases} \left[ \frac{1}{\cos^2 V} \left( \frac{dV}{ds} \right)^2 + \tan V \frac{d^2 V}{ds^2} - \omega^2 \right] \xi \\ + \left( \frac{d\omega}{ds} + \omega \tan V \frac{dV}{ds} \right) \eta - \omega \varpi \zeta = (\tan V + \sin 2V) \frac{dV}{ds}. \end{cases}$$

La surface sera du premier genre si la droite  $KK'$  est confondue avec  $HH'$ , c'est-à-dire si  $KK'$  est dans le plan  $SHH'$ . Ce dernier n'est autre chose, ici, que le plan perpendiculaire à l'axe du cône,  $\xi = 0$ . Il faudra donc que l'on ait

$$\omega \varpi = 0$$

et

$$\frac{1}{\omega} \left( \frac{d\omega}{ds} + \omega \tan V \frac{dV}{ds} \right) = \frac{1}{\sin^2 V} (\tan V + \sin 2V) \frac{dV}{ds}.$$

Laissant de côté  $\omega = 0$ , ces conditions se réduisent à

$$(8) \quad \varpi = 0, \quad \frac{1}{\omega} d\omega = 3 \cot V dV.$$

La dernière a pour intégrale

$$(9) \quad \rho = \frac{l}{\sin^3 V},$$

$\rho$  désignant le rayon de courbure de la trajectoire du sommet qui est plane, d'après la première condition, et  $l$  une constante arbitraire.

On peut vérifier que, si ces deux conditions sont remplies, l'équation des lignes asymptotiques se ramène bien à deux équations de Riccati. C'est, en général,

$$(10) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \mu \pm \sqrt{\mathfrak{J}},$$

en posant

$$\mu = \varpi + \omega \sin \varphi \cot V,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} = & \frac{1}{\omega \cos \varphi + \frac{dV}{ds}} \left[ \frac{\omega \cos \varphi + \frac{dV}{ds}}{\sin V \cos V} - 2\varpi \sin \varphi \right] \\ & \times \left\{ \left( 3\omega \cot V \frac{dV}{ds} - \frac{d\omega}{ds} \right) \cos \varphi + \omega \varpi \sin \varphi + \cot V \left[ \omega^2 + 2 \left( \frac{dV}{ds} \right)^2 \right] - \frac{d^2 V}{ds^2} \right\}. \end{aligned}$$

On voit aisément que  $\mathfrak{J}$  est indépendant de  $\varphi$  si les conditions (8) sont vérifiées, et l'on est ramené à l'intégration de

$$\frac{d\varphi}{ds} = \omega \sin \varphi \cot V \pm \frac{1}{\sin V} \sqrt{\omega^2 + 2 \left( \frac{dV}{ds} \right)^2 - \tan V \frac{d^2 V}{ds^2}}.$$

Voici une dernière propriété géométrique de ces surfaces, conséquence de la relation

$$\rho \sin^3 V = l :$$

*La projection, sur les génératrices du cône, du segment de normale de la trajectoire du sommet, compris entre le sommet et le plan de la conique, a une longueur constante.*

Cette particularité se présente pour les quadriques considérées comme enveloppes de cônes de révolution.

Des raisonnements semblables, appliqués aux surfaces enveloppes de sphères, montrent que les surfaces de révolution sont les seules appartenant à cette catégorie qui puissent être regardées comme surfaces du premier genre.



## Surfaces du second genre.

Il n'y en a pas parmi les surfaces enveloppes de cônes de révolution, si la conique de contact n'est pas un cercle; les génératrices SH et SH' sont, en effet, dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône et ne peuvent être confondues, condition qui devrait être remplie.

Mais il y en a parmi les surfaces enveloppes de sphères, comme nous allons le vérifier. Appelons  $x_0, y_0, z_0$  les coordonnées du centre O de la sphère variable qui décrit une courbe C. Soient

R le rayon de la sphère;

$\omega$  et  $\varpi$  la courbure et la torsion de C;

$s$  son arc pris pour variable indépendante;

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$  les cosinus directeurs des arêtes du trièdre de C.

Prenons pour seconde variable, afin de fixer la position d'un point, l'angle  $\varphi$  que fait le plan passant par ce point  $(xyz)$ , et l'axe O $\xi$  du cercle sur lequel il se trouve avec le plan osculateur correspondant de C. Un calcul rapide permet d'écrire

$$(11) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha R \frac{dR}{ds} + R \left[ 1 - \left( \frac{dR}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 \cos \varphi + \alpha_2 \sin \varphi), \\ y = y_0 + \beta R \frac{dR}{ds} + R \left[ 1 - \left( \frac{dR}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (\beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \sin \varphi), \\ z = z_0 + \gamma R \frac{dR}{ds} + R \left[ 1 - \left( \frac{dR}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi). \end{cases}$$

Le plan AB (fig. 3) du cercle, rapporté au trièdre (O $\xi\eta\zeta$ ), a pour équation

$$(12) \quad \xi + R \frac{dR}{ds} = 0.$$

La droite KK' est définie par cette équation jointe à la suivante :

$$(13) \quad \omega \eta + 1 + \frac{d}{ds} \left( R \frac{dR}{ds} \right) = 0.$$

On trouve aussi que le plan SHH', qui est le plan diamétral conju-



$h$  désignant une constante arbitraire. On peut alors remplacer la seconde par

$$\omega^2 = \frac{h}{4R^3}.$$

Ces deux conditions fournissent l'arc et la courbure de la trajectoire du centre de la sphère variable, comme fonctions de son rayon. On vérifie alors que l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface, qui est en général

$$(18) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \omega - \frac{\omega \frac{dR}{ds} \sin \varphi}{\left[1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \pm \sqrt{J},$$

en posant

$$J = \frac{1}{4R^2} - \frac{1}{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2} \left\{ \omega \cos \varphi + \frac{2R \frac{d^2R}{ds^2} + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - 1}{2R \left[1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \right\}^2,$$

se réduit à deux équations de Riccati

$$(19) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \omega - \frac{\sin \varphi}{2R} \left[ \sqrt{1 - \frac{h}{R}} \pm 1 \right].$$

Voici maintenant quelques propriétés géométriques de ces surfaces. D'abord, en général, la tangente à la trajectoire du sommet est dans le plan osculateur à la trajectoire du centre de la sphère. Pour ces surfaces particulières, on a

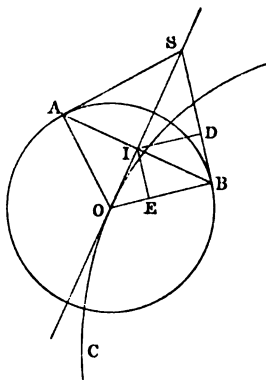
$$\begin{aligned} \text{OI} &= \pm R \frac{dR}{ds} = \sqrt{R^2 - R\bar{h}}, \\ \text{AI} &= \sqrt{R\bar{h}}. \end{aligned}$$

Si  $V$  est le demi-angle au sommet du cône, on a

$$\cos V = \frac{\text{AI}}{R} = \sqrt{\frac{\bar{h}}{R}}.$$

Soit  $ID$  (*fig. 1*) la distance du centre du cercle au cône circonscrit;

Fig. 4.


$$d\sigma^2 = \frac{h}{4R} ds^2 = \frac{h dR^2}{4(R-h)}.$$
$$\sigma = \pm \sqrt{h(R-h)} + \text{const.} = \pm \mathbf{IE} + \text{const.},$$

*La somme ou la différence de l'arc décrit par le centre du cercle variable et de la distance de ce point aux génératrices du cône de normales correspondant est une quantité constante.*

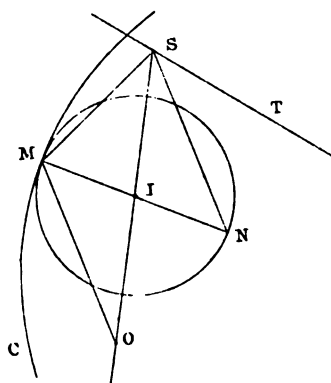
On en peut obtenir d'autres en suivant une voie toute différente et envisageant la surface comme engendrée par un cercle osculateur à une courbe gauche. Appelons encore  $\omega$  et  $\pi$  la courbure et la torsion de cette courbe; il est aisé de démontrer les résultats suivants : la

distance IS (*fig. 5*) du sommet du cône circonscrit le long du cercle osculateur en M, au plan de ce cercle, est égale à

$$-\varpi \frac{1}{\frac{d\omega}{ds}},$$

cette distance étant comptée positivement dans le sens direct choisi sur la binormale. La tangente ST à la trajectoire du sommet est située

Fig. 5.



dans le plan normal à la courbe, soit SMN. La surface engendrée sera du second genre si ST est confondue, soit avec SM, soit avec SN; la première hypothèse est impossible, et la seconde fournit la relation

$$(20) \quad \varpi^2(k^2 - \omega^2) = \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2,$$

$k$  désignant une constante arbitraire qui est l'inverse de la distance constante du point I aux génératrices du cône circonscrit. On peut donc considérer les enveloppes de sphères du second genre comme engendrées par le cercle osculateur à une courbe dont la courbure, la torsion et l'arc sont liés par la relation (20).

### Recherche des lignes asymptotiques de quelques surfaces simples.

Nous commencerons par les surfaces algébriques d'ordre  $n$  avec une droite multiple d'ordre  $n - 2$ , dans le cas où les plans tangents le long de cette droite sont fixes, et où les cônes de tangentes aux deux points coniques situés sur cette droite se réduisent à deux plans que nous choisirons pour faces du tétraèdre de référence; nous prendrons comme autres faces deux plans quelconques passant par la droite multiple. L'équation de la surface prend alors la forme

$$(a) \quad zt f(x, y) = \varphi(x, y),$$

$f$  désignant une fonction homogène de degré  $n - 2$  et  $\varphi$  une fonction semblable de degré  $n$ . Si nous projetons cette surface sur un plan au moyen de droites passant par l'un des points multiples d'ordre  $n - 1$ , savoir

$$y = \lambda x, \quad z = \mu x,$$

nous obtenons pour les coordonnées d'un point quelconque de cette surface

$$(b) \quad \frac{x}{\mu} = \frac{y}{\lambda\mu} = \frac{z}{\mu^2} = \frac{t}{F(\lambda)},$$

en posant

$$F(\lambda) = \frac{\varphi(1, \lambda)}{f(1, \lambda)}.$$

En formant, au moyen de ces expressions, l'équation différentielle des lignes asymptotiques, il vient

$$(c) \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{d^2 F}{d\lambda^2} d\lambda \quad \frac{dF}{d\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)^2 - 2F \frac{d^2 F}{d\lambda^2}}.$$

Cette équation se simplifiera si le polynôme  $f$  a des racines multiples, c'est-à-dire si plusieurs nappes de la surface se raccordent le long de la droite singulière, ou bien si le polynôme  $\varphi$  a des racines triples au moins, et, par suite, si trois au moins des plans passant par la droite multiple et coupant la surface suivant une conique évanouissante sont

confondus. Le cas le plus favorable est celui où toutes les nappes se raccordent et où tous les plans des sections singulières sont confondus. L'équation de la surface s'écrit alors

$$(d) \quad ztx^{n-2} = y^n.$$

En tenant compte des formules (b), sans supposer forcément  $n$  entier, on trouve comme équation des asymptotiques correspondantes

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{n \pm \sqrt{n(2-n)}}{n(n-1)} \frac{d\mu}{\mu},$$

qui admet pour intégrale

$$\lambda = C\mu^{\frac{n \pm \sqrt{n(2-n)}}{n(n-1)}}.$$

Ces surfaces (d) ne sont algébriques que si  $n$  est commensurable.

Si les deux points fixes par lesquels passent les coniques sont réels, les lignes asymptotiques ne sont réelles que pour des valeurs de  $n$  comprises entre zéro et 2. Elles seront algébriques si  $\sqrt{n(2-n)}$  est commensurable en même temps que  $n$ . Si l'on pose

$$n = \frac{a}{b},$$

on trouve que l'on doit avoir

$$(a-b)^2 \pm b^2 = c^2,$$

$c$  désignant un nombre entier. On est donc ramené à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

On prendra

$$b = z, \quad a = x + z, \quad \sqrt{n(2-n)} = \frac{y}{z}.$$

Les valeurs les plus simples que l'on puisse attribuer à  $n$  sont :

$$1^\circ \quad n = \frac{1}{2}.$$

La surface est

$$z^2 t^2 = yx^2.$$

Les asymptotiques sont alors deux séries de courbes gauches du sixième ordre, unicursales, intersections de cônes du deuxième et du troisième degré.

2°

$$n = \frac{2}{3}.$$

La surface est

$$z^3 t^3 = y^2 x^3.$$

Les lignes asymptotiques sont encore des courbes gauches unicursales de sixième ordre; mais elles ne sont pas tracées sur des surfaces du deuxième degré.

Si la surface ( $\alpha$ ) est du troisième degré, on sera ramené aux fonctions elliptiques. Cependant, dans certains cas particuliers, l'intégrale sera algébrique: c'est ce qui arrive pour la surface tétraédrale du troisième degré à quatre points coniques

$$ayzt + bxzt + cxyt + dxyz = 0,$$

qui est engendrée de six façons différentes par des coniques passant par deux points fixes. On sait que les asymptotiques sont des courbes algébriques d'ordre 6 et de genre 0.

Nous terminerons cette étude en cherchant les lignes asymptotiques de la surface du quatrième ordre présentant une conique double et quatre points coniques; nous avons déjà vu que les deux séries de coniques passant par les deux couples de points coniques sont conjuguées, et que les coniques de chaque série sont tangentes à deux plans fixes. Kummer a montré que l'équation d'une pareille surface peut se mettre sous la forme

$$[p^2 + qr - st]^2 = 4p^2qr$$

ou sous la forme équivalente

$$[p^2 + st - qr]^2 = 4p^2st,$$

$p, q, r, s, t$  désignant des fonctions linéaires. Supposons réelles les fonctions linéaires  $q, r, s, t$  et prenons pour faces du tétraèdre de référence les plans correspondants qui touchent la surface, chacun suivant une conique. L'équation devient

$$(1) \quad [P^2 + xy + zt]^2 - 4P^2xy = [P^2 + st - xy]^2 - 4P^2st = 0.$$



Soit

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t.$$

Posons

$$y = \lambda^2 x, \quad t = \mu^2 z.$$

Un calcul rapide permet d'écrire les coordonnées d'un point quelconque de la surface sous la forme

$$(2) \quad \frac{x}{\gamma + \mu + \delta\mu^2} = \lambda^2 \left( \gamma + \frac{\gamma}{\mu + \delta\mu^2} \right) = \frac{z}{\alpha + \lambda + \beta\lambda^2} = \frac{t}{\mu^2 (\alpha + \lambda + \beta\lambda^2)}.$$

Au moyen de ces formules, on trouve comme équation des asymptotiques

$$(3) \quad \lambda \left( \frac{d\lambda^2}{\alpha + \lambda + \beta\lambda^2} \right) = \mu \left( \frac{d\mu^2}{\gamma + \mu + \delta\mu^2} \right).$$

La transformation

$$(4) \quad \lambda = \frac{1}{\beta} \left( 4u - \frac{1}{3} \right), \quad \mu = \frac{1}{\delta} \left( 4v - \frac{1}{3} \right)$$

permet de remplacer cette équation par la suivante

$$(5) \quad 4u^3 - g_2 u - g_3 = 4v^3 - g'_2 v - g'_3,$$

en posant

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{1-3\alpha\beta}{12}, & g'_2 &= \frac{1-3\gamma\delta}{12}, \\ g_3 &= \frac{9\alpha\beta-2}{27 \times 16}, & g'_3 &= \frac{9\gamma\delta-2}{27 \times 16}. \end{aligned}$$

L'intégrale générale est donc

$$(6) \quad \begin{cases} u = p(\theta, g_2, g_3), \\ v = p(\pm \theta + m, g'_2, g'_3), \end{cases}$$

$\theta$  désignant une variable et  $m$  une constante arbitraire. On a

$$\begin{aligned} g_2 - 27g_3^2 &= \frac{\alpha^2\beta^2(1-4\alpha\beta)}{16}, \\ g'_2 - 27g'^2_3 &= \frac{\gamma^2\delta^2(1-4\gamma\delta)}{16}. \end{aligned}$$

La réalité des deux couples de points coniques de la surface dépend précisément des signes de ces deux quantités  $1 - 4\alpha\beta$  et  $1 - 4\gamma\delta$ . L'intégrale générale de (5) peut être algébrique; cela arrive, en particulier, si l'on a

$$g'_2 = g_2 \quad \text{et} \quad g'_3 = g_3,$$

ce qui entraîne la seule condition

$$(7) \quad \alpha\beta = \gamma\delta.$$

Il est facile de voir qu'alors le plan  $P = 0$  est tangent à la quadrique

$$xy - zt = 0.$$

La conique double de la surface se compose d'un système de deux droites.

Les quatre points coniques sont alors de même nature, puisque l'on a

$$1 - 4\alpha\beta = 1 - 4\gamma\delta.$$

Si l'on suppose  $\alpha$  et  $\beta$  de même signe, on peut écrire

$$\alpha = p^2\beta, \quad \gamma = q^2\delta,$$

avec la condition

$$p\beta = q\delta,$$

qui remplace (7).

La transformation

$$\lambda = p \frac{1-u}{1+u}, \quad \mu = q \frac{1-v}{1+v}$$

substitue à l'équation (3) la suivante

$$(8) \quad \frac{du^2}{(1-u^2)(1-hu^2)} = \frac{dv^2}{(1-v^2)(1-hv^2)},$$

$h$  désignant la constante  $\frac{1-2p\beta}{1+2p\beta}$ .

On a alors, comme expressions des coordonnées d'un point de la surface,

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{x}{p(1-u)^2(1-hv^2)} = \frac{y}{p(1-u)^2(1-hv^2)} \\ \frac{z}{q(1-v)^2(1-hu^2)} = \frac{t}{q(1-v)^2(1-hu^2)}, \end{cases}$$

avec

$$P = \frac{1-h}{1+h} \left( p x + \frac{y}{p} - q z - \frac{t}{q} \right).$$

L'intégrale générale de (8) peut s'écrire

$$(10) \quad (hu^2v^2 + 1)(1 + h + 2\rho) + (\rho^2 - h)(u^2 + v^2) + 2uv(1 + \rho)(h + \rho) = 0,$$

$\rho$  désignant une constante arbitraire.

Une étude détaillée de la représentation de la surface sur un plan au moyen des formules (9) et (10) permet de démontrer les propriétés suivantes :

*Les asymptotiques sont des courbes du huitième ordre et de genre 1 ; chacune rencontre en deux points les sections coniques de la surface qui passent par les points coniques ; en quatre points, chaque droite double, et en quatre points aussi chacune des coniques suivant lesquelles la surface est coupée par un faisceau de plans passant par une droite double. Enfin chacune passe par les points coniques qu'elle admet pour points doubles.*

La réalité de ces courbes ne change pas tant qu'elles ne rencontrent pas l'un des points coniques de la surface ou l'une de ses coniques de contact avec les quatre faces du tétraèdre de référence. Il en est d'ailleurs de même pour la surface générale représentée par l'équation (1). Dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont de signes contraires, la transformation employée plus haut doit être remplacée par une autre ; nous prendrons alors la suivante, qui exige seulement que les points doubles soient réels. Posons

$$\lambda = a(1 - u), \quad \mu = b(1 - v),$$

$a$  et  $b$  désignant deux racines des équations

$$\begin{aligned} \beta a^2 + a + \alpha &= 0, \\ \delta b^2 + b + \gamma &= 0, \end{aligned}$$

lesquelles sont réelles en vertu de l'hypothèse faite plus haut. On peut, de plus, les choisir de telle sorte que  $\alpha\beta = b\delta$  en vertu de la re-

lation  $\alpha\beta = \gamma\delta$ . Si l'on pose

$$h = \frac{\alpha\beta}{1 + 2\alpha\beta},$$

il vient comme expressions des coordonnées d'un point de la surface

$$(11) \quad \frac{x}{\frac{\rho}{a}(1-h\nu)} = \frac{y}{av(1-h\nu)(1-u)^2} = \frac{z}{\frac{u}{b}(1-hu)} = \frac{t}{bu(1-hu)(1-\nu)^2}.$$

L'équation des asymptotiques est alors

$$(12) \quad u(1-u)(1-hu) \frac{du^2}{dv^2} - \frac{dv^2}{v(1-\nu)(1-h\nu)},$$

et son intégrale générale est

$$(13) \quad [huv + 1 - \rho(u + \nu)]^2 - 4(\rho - 1)(\rho - h)uv = 0.$$

Ces formules permettent de retrouver les résultats démontrés plus haut sur les lignes asymptotiques.

Un cas plus particulier encore est celui où l'on aurait

$$1 - 4\alpha\beta = 1 - 4\gamma\delta = 0.$$

La constante  $h$  est alors nulle dans les équations (9), qui deviennent

$$(14) \quad \frac{x}{2\beta(1+u)^2} = \frac{y}{\frac{1}{2\beta}(1-u)^2} = \frac{z}{2\delta(1+\nu)^2} = \frac{t}{\frac{1}{2\delta}(1-\nu)^2}.$$

Les lignes asymptotiques de cette surface sont représentées par l'équation

$$(15) \quad u^2 + v^2 - 1 + 2uv\rho + \rho^2 = 0.$$

Ce sont des courbes gauches de quatrième ordre et de seconde espèce comme celles de la surface de Steiner, dont la surface proposée est un cas singulier.

## Des surfaces minima.

Nous allons nous servir de l'équation trouvée pour les lignes asymptotiques, en général, savoir

$$(1) \quad \left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2 = F(\lambda) \frac{\partial M}{\partial \lambda} \frac{\partial N}{\partial \lambda},$$

pour rechercher celles des surfaces étudiées qui sont des surfaces minima. Écrivons que les lignes asymptotiques sont rectangulaires ; il vient

$$\left[ \left( N \frac{\partial n_1}{\partial \mu} - n_1 \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)^2 + \left( N \frac{\partial n_2}{\partial \mu} - n_2 \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)^2 + \left( N \frac{\partial n_3}{\partial \mu} - n_3 \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)^2 \right] \frac{d\mu^2}{d\lambda^2} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \left( \frac{\partial N}{\partial \lambda} \right)^2.$$

Si l'on remplace dans cette relation  $\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2$  par sa valeur tirée de (1), on obtient

$$(2) \quad \left[ \left( N \frac{\partial n_1}{\partial \mu} - n_1 \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)^2 + \left( N \frac{\partial n_2}{\partial \mu} - n_2 \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)^2 + \left( N \frac{\partial n_3}{\partial \mu} - n_3 \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)^2 \right] F(\lambda) \frac{\partial M}{\partial \lambda} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{\partial N}{\partial \lambda}.$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit  $\mu$  ; d'ailleurs, elle est de degré 6 par rapport à  $\mu$ , ce qui montre qu'il existe, en général, sur chaque conique six points pour lesquels les lignes asymptotiques sont rectangulaires. Posons

$$l_i = N \frac{\partial n_i}{\partial \mu} - n_i \frac{\partial N}{\partial \mu} \quad (i = 1, 2, 3).$$

L'équation  $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 0$  fournit les quatre points  $(a_i)$  de la conique C en lesquels la tangente va rencontrer le cercle imaginaire à l'infini  $\Gamma$ . L'équation  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0$  donne les quatre points  $(b_i)$  de la conique pour lesquels la génératrice  $(Sb_i)$  correspondante va rencontrer  $\Gamma$ . Si (2) est une identité, deux points  $(a_i)$  au moins sont confondus avec deux points  $(b_i)$ . Cela n'est possible que si C rencontre  $\Gamma$  en deux points  $(c_1, c_2)$  ; mais alors C est un cercle, et  $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$  est carré parfait. Il peut maintenant se présenter deux cas :

1° Le cône  $(S, C)$  est tangent au cercle  $\Gamma$  aux deux points  $(c_1, c_2)$ .

Alors les quatre points  $(a_i)$  sont confondus avec les quatre points  $(b_i)$ , deux à deux en  $c_1$  et en  $c_2$ . La surface est à génératrice circulaire et le cône circonscrit est de révolution ; c'est donc une enveloppe de sphères. L'identité (2) ne renferme plus alors que les polynômes  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$  qui devraient encore avoir mêmes racines ; la surface serait donc du premier genre, et nous savons que les seules surfaces enveloppes de sphères du premier genre sont des surfaces de révolution.

2° Le cône  $(S, C)$  n'est pas tangent au cercle  $\Gamma$  aux deux points  $c_1$  et  $c_2$ . Il faut alors que  $\frac{\partial N}{\partial \lambda} = 0$  admette les deux autres racines du polynôme  $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$ , lesquelles correspondent toujours aux deux points  $c_1$  et  $c_2$  ; il faut donc que la droite  $KK'$  soit confondue avec  $c_1, c_2$ , et par suite soit rejetée à l'infini. La surface ne peut donc être engendrée que par un cercle parallèle à un plan fixe, et l'on retrouve ainsi les surfaces minima à génératrices circulaires étudiées par Riemann. La surface minima de révolution rentre dans cette catégorie.

Le résultat que nous venons de démontrer est une conséquence immédiate d'un théorème dû à M. Schwarz :

*Si une surface minima est enveloppée par une série de cônes du second degré, ces cônes sont homocycliques (Journal de Crelle, t. 80).*

Par suite, si deux cônes infiniment voisins se coupent suivant une conique, cette conique est un cercle et son plan a une direction constante.



### TROISIÈME PARTIE.



Les surfaces que nous étudions ne présentent pas, en général, de propriétés métriques beaucoup plus simples que celles des surfaces à génératrice conique quelconque ; cependant, ces propriétés peuvent

se simplifier dans certains cas particuliers, comme nous allons le montrer.

### Recherche des trajectoires orthogonales des coniques génératrices.

Les équations de la surface étant prises sous la forme

$$(1) \quad x = X + \frac{n_1}{N}, \quad y = Y + \frac{n_2}{N}, \quad z = Z + \frac{n_3}{N},$$

avec des axes de coordonnées rectangulaires, l'équation différentielle des courbes en question est

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} dx + \frac{\partial y}{\partial \mu} dy + \frac{\partial z}{\partial \mu} dz = 0$$

ou bien

$$(2) \quad (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{\partial N}{\partial \lambda} (l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3),$$

en posant, comme plus haut,

$$l_i = N \frac{\partial n_i}{\partial \mu} - n_i \frac{\partial N}{\partial \mu}.$$

Appelons A le coefficient de  $\frac{d\mu}{d\lambda}$  et B le second membre de l'équation (2). Le polynôme A, du quatrième degré par rapport à  $\mu$ , admet comme racines les valeurs de  $\mu$  correspondant aux points de rencontre  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de la conique avec ses directrices.

B est un polynôme du sixième degré dont les racines se rapportent, soit aux points K et K' si elles appartiennent à  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ , soit aux points  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de la conique pour lesquels la génératrice du cône est normale à la conique; ces derniers points s'obtiennent par la Géométrie, en projetant orthogonalement le sommet du cône sur le plan de la conique et menant du point ainsi obtenu les normales à la conique.

B est nul identiquement, si ces derniers points sont indéterminés, ce qui a lieu seulement pour les enveloppes de sphères.

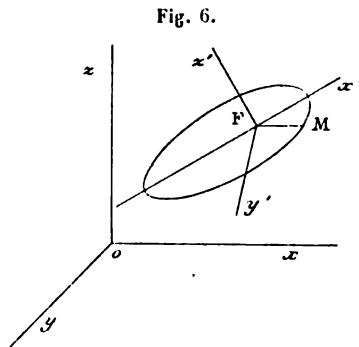
L'équation (2) se simplifiera si les polynômes A et B ont des racines communes, ce qui ne peut avoir lieu que dans les deux cas suivants :

1° *La caractéristique du plan de la conique variable est une directrice de cette conique ;*

2° *Le sommet du cône se projette orthogonalement sur le plan de la conique en un foyer de cette courbe.*

Dans ces deux cas, les degrés des polynômes A et B s'abaissent de deux unités. Si les deux conditions se trouvent remplies simultanément, l'équation se réduit à une équation de Riccati, et les coniques génératrices de la surface sont partagées homographiquement par leurs trajectoires orthogonales. Nous reviendrons, dans un instant, sur ce cas intéressant.

Nous sommes amenés ainsi à étudier la surface engendrée par une conique variable, avec cône circonscrit, le sommet du cône se projetant orthogonalement en un foyer de la conique. Imaginons (*fig. 6*) un



système d'axes rectangulaires variables composé de l'axe focal  $Fx'$  de la conique, de la perpendiculaire  $Fy'$  à cet axe dans le plan de la conique et de la normale  $Fz'$  au plan de la conique menée par le foyer. Appelons  $abc$ ,  $a_1b_1c_1$ ,  $a_2b_2c_2$  les cosinus directeurs de ces axes mobiles par rapport à des axes fixes rectangulaires. Soient  $x_0, y_0, z_0$  les coordonnées du foyer;  $s$  l'arc de sa trajectoire pris comme variable pour fixer la position de la conique;  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe relativement aux axes mobiles. Nous détermi-



nerons un point M sur chaque conique au moyen de l'angle polaire  $\theta$  que fait le rayon vecteur de ce point avec  $Fx'$ . Les coordonnées de ce point sont

$$x' = \frac{p \cos \theta}{1 + e \cos \theta}, \quad y' = \frac{p \sin \theta}{1 + e \cos \theta}, \quad z' = 0,$$

$p$  désignant le paramètre et  $e$  l'excentricité de la conique. Il faut encore adjoindre à ces formules celles qui permettent de passer des axes mobiles aux axes fixes, et inversement.

On en déduit pour les paramètres directeurs des tangentes aux courbes  $s = \text{const.}$  et  $\theta = \text{const.}$ , par rapport aux axes mobiles, les quantités suivantes

|                          | $Fx'$  | $Fy'$   | $Fz'$                  |
|--------------------------|--|---|------------------------|
| $\theta = \text{const.}$ | $\alpha + \frac{\partial x'}{\partial s} - w y'$ | $\beta + \frac{\partial y'}{\partial s} + w x'$ | $\gamma - v x' + u y'$ |
| $s = \text{const.}$      | $\frac{\partial x'}{\partial \theta}$            | $\frac{\partial y'}{\partial \theta}$           | 0                      |

en posant

$$u = a_1 \frac{da_1}{ds} + b_1 \frac{db_1}{ds} + c_1 \frac{dc_1}{ds},$$

$$v = a \frac{da_2}{ds} + b \frac{db_2}{ds} + c \frac{dc_2}{ds},$$

$$w = a_1 \frac{da}{ds} + b_1 \frac{db}{ds} + c_1 \frac{dc}{ds}.$$

L'équation du plan tangent à la surface ainsi engendrée, en un point de coordonnées  $(s, \theta)$ , par rapport aux axes mobiles peut alors s'écrire

$$[x'(e + \cos \theta) + y' \sin \theta - p][\gamma(1 + e \cos \theta) - v p \cos \theta + u p \sin \theta] \\ = z' \left[ \frac{dp}{ds} + \cos \theta \left( e \frac{dp}{ds} - p \frac{de}{ds} \right) + (1 + e \cos \theta)(\alpha e + \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) - w p e \sin \theta \right].$$

Si l'on écrit que ce plan va passer par un même point  $(x' y' z')$ , quel que soit  $\theta$ , on obtient, pour déterminer les coordonnées de ce point, cinq

équations :

$$\begin{aligned}x'(\gamma e - vp) - upy' &= \alpha ez', \\upx' + (\gamma e - vp)y' &= \beta ez', \\(ex' - p)(\gamma e - vp) + \gamma x' &= \left[ \alpha(e^2 + 1) + e \frac{dp}{ds} - p \frac{de}{ds} \right] z', \\up(ex' - p) + \gamma y' &= (\beta - vpe)z', \\\gamma(ex' - p) + upy' &= \left( \frac{dp}{ds} + \alpha e \right) z'.\end{aligned}$$

En écrivant que ces cinq équations à trois inconnues ont une solution, on obtiendrait deux relations entre les données, et cela pourrait conduire à une méthode cinématique pour l'étude des surfaces en question.

Revenons au cas particulier qui nous intéresse; le sommet du cône est sur  $Fz'$ .

Posons donc

$$x' = y' = 0, \quad z' = \delta.$$

Il vient

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = 1$$

et

$$-\frac{p}{\delta} = \frac{dp}{ds} = -\frac{ev}{u} = \frac{1}{v} \frac{de}{ds}.$$

La trajectoire du foyer est donc normale au plan de la conique. Si l'on appelle  $\omega$  et  $\varpi$  la courbure et la torsion de cette courbe,  $\varepsilon$  l'angle de sa normale principale avec l'axe focal de la conique, on montre aisément que l'on a

$$\begin{aligned}u &= \omega \sin \varepsilon, \\v &= \omega \cos \varepsilon, \\w &= -\varpi + \frac{d\varepsilon}{ds}.\end{aligned}$$

Les conditions restantes deviennent alors

$$(3) \quad -\frac{p}{\delta} = \frac{dp}{ds} = \frac{de}{ds} \frac{1}{\omega \cos \varepsilon} = \left( \omega - \frac{d\varepsilon}{ds} \right) \frac{e}{\omega \sin \varepsilon}.$$

On peut choisir arbitrairement la trajectoire du foyer ( $\omega$  et  $\varpi$ ) et l'angle  $\varepsilon$  de l'axe focal avec la normale principale à cette courbe; les

relations

$$(4) \quad \frac{de}{e} = \cot \varepsilon (\varpi ds - d\varepsilon), \quad dp = \frac{de}{\omega \cos \varepsilon}$$

détermineront la grandeur de la conique dans chacune de ses positions; cela n'exige que des quadratures. On voit de plus que, la trajectoire du foyer étant une courbe arbitrairement choisie, les trois quantités  $\frac{dp}{ds}$ ,  $\frac{de}{ds}$ ,  $\varpi - \frac{d\varepsilon}{ds}$  sont nulles en même temps; le cône circonscrit est alors un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de la conique, le paramètre et l'excentricité sont constants, c'est-à-dire que la conique est de grandeur constante; enfin, l'axe focal de la conique engendre une développable. L'une quelconque de ces conditions géométriques entraîne les autres.

Si les conditions (4) sont remplies, le plan de la conique restant normal à la trajectoire d'un foyer, les degrés des polynômes A et B s'abaissent de deux unités dans l'équation (2); *cette équation se réduira à une équation de Riccati* si, de plus, la droite polaire de la trajectoire C du foyer est la directrice correspondant au second foyer de la conique. Cela exige d'abord  $\varepsilon = 0$  et, par suite,

$$(5) \quad \varpi = 0, \quad de = \omega dp.$$

Si l'on écrit encore que le centre de courbure de C (qui est plane) est au pied de la seconde directrice, on trouve

$$(6) \quad \omega p(1 + e^2) = e(1 - e^2).$$

La comparaison avec (5) suivie d'une intégration donne

$$(7) \quad pe = l(1 - e^2),$$

$l$  désignant une constante arbitraire. Cette relation indique que la distance focale de la conique est constante et égale à  $2l$ . On pourra choisir arbitrairement la trajectoire plane d'un foyer; la trajectoire de l'autre est alors une courbe parallèle à la première dans son plan; la distance focale étant égale à  $2l$ , le paramètre et l'excentricité de la conique

sont fournis par les formules

$$(8) \quad e^2 = \frac{l\omega}{1-l\omega} = \frac{l}{\rho-l}, \quad p = \frac{l(1-e^2)}{e}.$$

Nous allons reprendre cette recherche des trajectoires orthogonales et montrer que l'existence d'un cône circonscrit le long de chaque conique ne simplifie pas, en général, l'équation différentielle dont dépendent ces courbes. Si l'on se reporte aux équations d'une surface engendrée par une conique qui se déplace d'une façon quelconque, on trouve pour l'équation en question

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} p \frac{d\theta}{ds} (1+e^2+2e\cos\theta) + (1+e\cos\theta)^2 (\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta + \beta e + wp) \\ + e \sin\theta \left[ \frac{dp}{ds} (1+e\cos\theta) + p \cos\theta \frac{de}{ds} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation est indépendante de  $u$  et  $v$ , et, si l'on suppose qu'il existe un cône circonscrit, les deux conditions que l'on obtient renfermant ces mêmes quantités, le nombre des fonctions arbitraires qui figurent dans (9) ne se trouve pas diminué.

Effectuons le changement de variable

$$(10) \quad d\sigma = ds \sqrt{1-\gamma^2}.$$

L'équation (9) est remplacée par

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} p d\theta (1+e^2+2e\cos\theta) + (1+e\cos\theta)^2 \left[ \sin(\varepsilon-\theta) + e \sin\varepsilon + \frac{p'w}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right] d\sigma \\ + e \sin\theta [dp(1+e\cos\theta) + p \cos\theta de] = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\cos\varepsilon = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \sin\varepsilon = \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Cette équation nouvelle peut être envisagée comme l'équation des trajectoires orthogonales d'une conique qui se déplace dans son plan,  $p$  et  $e$  désignant son paramètre et son excentricité,  $\sigma$  l'arc de la trajectoire  $\Gamma$  d'un foyer de cette conique et  $\varepsilon$  l'angle de l'axe focal de cette conique avec la tangente à  $\Gamma$ . La vitesse angulaire du système des axes de la conique par rapport aux axes fixes est à chaque instant

égale à  $\frac{w}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ . Si l'on introduit dans cette équation la fonction in-

connue  $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ , elle prend la forme suivante :

$$(11') \quad \sin \theta dr + p d\theta + \left[ \sin(\varepsilon - \theta) + \frac{pw}{\sqrt{1-\gamma^2}} + e \sin \varepsilon \right] d\sigma = 0.$$

Nous voyons ainsi que l'on peut toujours ramener la recherche des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de coniques dans l'espace à une recherche semblable pour un système de coniques dans un plan. Toutefois, nous avons supposé, au début, le foyer de la conique variable, puisque nous avons pris comme variable indépendante l'arc de sa trajectoire; puis, lors du changement de variable (10), nous avons supposé  $1 - \gamma^2$  non nul, c'est-à-dire le plan de la conique non normal à la courbe décrite par le foyer.

Dans le premier cas, si l'on prend une variable indépendante quelconque  $t$ , l'équation des trajectoires orthogonales devient

$$(12) \quad \begin{cases} p d\theta(1 + e^2 + 2e \cos \theta) + wp(1 + e \cos \theta)^2 dt \\ - e \sin \theta [dp(1 + e \cos \theta) - p \cos \theta de] = 0, \end{cases}$$

en posant, cette fois,

$$w = a_1 \frac{da}{dt} + b_1 \frac{db}{dt} + c_1 \frac{dc}{dt}.$$

Dans le second cas, si l'on appelle  $\varpi$  la torsion de la courbe décrite par le foyer,  $\varepsilon$  l'angle de l'axe focal de la conique avec la normale principale à cette courbe, on obtient

$$(13) \quad \begin{cases} p d\theta(1 + e^2 + 2e \cos \theta) + p(d\varepsilon - \varpi ds)(1 + e \cos \theta)^2 \\ + e \sin \theta [dp(1 + e \cos \theta) - p \cos \theta de] = 0. \end{cases}$$

Ces équations (12) et (13) deviennent identiques si l'on prend

$$d\varepsilon - \varpi ds = w dt,$$

et conviennent également toutes deux aux trajectoires orthogonales d'une famille de coniques ayant un plan fixe et un foyer fixe. La dernière peut encore se mettre sous l'une quelconque des deux formes

suivantes :

$$(14) \quad \begin{cases} [r(e^2 - 1) + 2p]dr + p\left[\frac{p-r}{e}de - dp\right] + pre \sin \theta (d\varepsilon - \varpi ds) = 0, \\ p(d\theta + d\varepsilon - \varpi ds) + e \sin \theta dr = 0. \end{cases}$$

Les trajectoires orthogonales d'un système de coniques ayant un foyer fixe dans un plan fixe s'obtiennent aisément dans un certain nombre de cas simples, par exemple lorsque le système se compose de cercles concentriques, de paraboles homofocales, de coniques homofocales, etc. Nous allons retrouver ces cas simples pour les systèmes correspondants de l'espace au moyen des équations (14). D'abord, leur forme est indépendante de la courbure de la trajectoire C du foyer dans l'espace, et elles ne sont pas modifiées si l'on augmente  $\varepsilon$  d'une quantité constante. Appelons  $\Sigma$  les différentes surfaces réglées engendrées par les normales à C et découpant sur la surface proposée les trajectoires orthogonales de ses coniques; soit S la surface gauche engendrée par l'axe focal de la conique : si l'on augmente  $\varepsilon$  d'une quantité constante, c'est-à-dire si l'on fait tourner les génératrices de S d'un même angle autour de C, la fonction  $\theta$  ne sera pas modifiée et les nouvelles surfaces  $\Sigma$  ne seront autres que les anciennes dont les génératrices auront suivi le mouvement de rotation des génératrices de S. Dans le plan, cela reviendrait à supposer que l'on a fait tourner toutes les coniques d'un même angle autour du foyer commun : toutes les trajectoires orthogonales auront ainsi tourné du même angle.

Plus généralement, si l'on suppose que  $d\varepsilon - \varpi ds$  conserve la même valeur, l'équation à intégrer ne change pas.

Si  $d\varepsilon - \varpi ds = 0$ , c'est-à-dire si l'axe focal de la conique engendre une développable (ou s'il a une position fixe dans le plan), la première équation (14) devient

$$(15) \quad [r(e^2 - 1) + 2p]edr + p[(p - r)de - edp] = 0.$$

Si  $e$  est constant, c'est-à-dire si les coniques restent semblables à elles-mêmes, cette équation s'intègre immédiatement; son intégrale est

$$[p + r(e - 1)]^{e-1} [p - r(e + 1)]^{e+1} = \text{const.}$$

En particulier, si  $e = 1$  (paraboles homofocales dans le plan), cette intégrale se réduit à

$$r = \frac{p}{2} + \text{const.}$$

et donne une construction géométrique des trajectoires cherchées.

Si les deux polynômes du premier degré par rapport à  $r$  qui figurent dans l'équation (15) sont divisibles l'un par l'autre, c'est-à-dire si  $p$  et  $e$  sont liés par la relation

$$\frac{de}{e} = \frac{pde - edp}{2p},$$

qui admet pour intégrale

$$pe = l(1 - e^2),$$

$l$  désignant une constante arbitraire, cette équation (15) se réduit à

$$dr = -l \frac{de}{e^2},$$

dont l'intégrale est

$$r = \frac{l}{e} + \text{const.}$$

La surface correspondante est engendrée par une conique dont le plan est normal à la trajectoire d'un foyer et dont l'axe focal admet une enveloppe; de plus, la distance focale de cette conique est constante (coniques homofocales dans le plan). C'est ce qui a lieu pour les surfaces particulières que nous avons rencontrées plus haut et dont les génératrices coniques sont partagées homographiquement par leurs conjuguées.

Enfin, si la conique variable est un cercle de rayon  $r$ , la seconde équation (14) se ramène à

$$d(\theta + \varepsilon) - \omega ds = 0.$$

Les surfaces  $\Sigma$  sont alors les développables engendrées par les normales à  $C$ ; les coniques correspondant aux génératrices de la surface dans le plan sont des cercles de centre fixe.

*Remarque.* — La méthode cinématique que nous venons d'indiquer peut s'appliquer encore en prenant comme variable l'arc de la courbe décrite par le centre de la conique; on retrouve ainsi très facilement, et par des calculs quelquefois plus simples, les résultats que nous venons de démontrer sur les trajectoires orthogonales des coniques.

On vérifie très aisément aussi de cette façon que, si la surface est engendrée par des cercles, c'est une enveloppe de sphères ou bien le plan du cercle a une direction constante. Si la conique de contact est une section principale du cône circonscrit sans être un cercle, elle reste semblable à elle-même dans son déplacement, et l'axe de rotation du trièdre des axes formé par les axes de la conique et la perpendiculaire à leur plan se trouve dans le plan de cette conique; etc.

### Élément linéaire.

Si nous reprenons les formules générales

$$x = X + \frac{n_1}{N}, \quad \dots$$

et si nous posons

$$\mathfrak{R}^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{N^2},$$

nous trouvons facilement pour l'expression du carré de l'élément linéaire de la surface générale

$$ds^2 = \frac{\mathfrak{R}^2}{N^2} \left( \frac{\partial N}{\partial \lambda} \right)^2 d\lambda^2 - 2 \frac{\mathfrak{R}}{N} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mu} d\lambda d\mu + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \mu} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \mu} \right)^2 \right] d\mu^2.$$

Lorsque la surface est une enveloppe de sphères,  $\mathfrak{R}$  est indépendant de  $\mu$ , et, en tenant compte de l'identité

$$n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \mu} + n_2 \frac{\partial n_2}{\partial \mu} + n_3 \frac{\partial n_3}{\partial \mu} = \mathfrak{R}^2 N \frac{\partial N}{\partial \mu},$$

il vient

$$N^2 ds^2 = \mathfrak{R}^2 \left( \frac{\partial N}{\partial \lambda} \right)^2 d\lambda^2 + \left[ \left( \frac{\partial n_1}{\partial \mu} \right)^2 + \left( \frac{\partial n_2}{\partial \mu} \right)^2 + \left( \frac{\partial n_3}{\partial \mu} \right)^2 - \mathfrak{R}^2 \left( \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)^2 \right] d\mu^2.$$



La quantité placée entre crochets peut s'écrire

$$4[(p_1\mu + q_1)^2 + (p_2\mu + q_2)^2 + (p_3\mu + q_3)^2 - R^2(P_\mu + Q)^2],$$

et, en vertu de l'identité

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - R^2 N^2 = 0,$$

elle se réduit à une fonction de  $\lambda$ ; on a alors

$$N^2 ds^2 = R^2 \left( \frac{\partial N}{\partial \lambda} \right)^2 d\lambda^2 + 4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - R^2 Q^2) d\mu^2.$$

Cette forme conduit à une remarque intéressante : le coefficient de  $d\mu^2$  étant indépendant de  $\mu$ , le système des lignes de courbure de la surface sera en même temps un système isotherme si  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ , qui est la seule fonction de  $\mu$  figurant au second membre, est de la forme

$$f(\lambda) \times \varphi(\mu).$$

Mais alors  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$  a ses racines  $\mu$  constantes, et les cercles passent par deux points fixes ainsi que les sphères enveloppées. On a donc le théorème suivant déjà démontré par M. Demartres (*Annales de l'École normale*, 3<sup>e</sup> série, t. II) :

*Les seules surfaces enveloppes de sphères pour lesquelles les lignes de courbure forment un système isotherme sont celles pour lesquelles les sphères passent par deux points fixes.*

Ce sont aussi les surfaces inverses de cônes.

L'expression trouvée plus haut se simplifie également pour les surfaces enveloppes de cônes de révolution et non enveloppes de sphères. Mais un calcul direct permet de l'écrire

$$dS^2 \left( \omega \cos \varphi + \frac{dV}{ds} \right)^2 = \sin^2 V [A ds + \omega \sin \varphi d\varphi]^2 + \sin^2 V \left( \omega \cos \varphi + \frac{dV}{ds} \right)^2 (\mu ds - d\varphi)^2,$$

en posant

$$A = \omega^2 \cot V \cos^2 \varphi + \left( 3\omega \cot V \frac{dV}{ds} - \frac{d\omega}{ds} \right) \cos \varphi + 2 \cot V \left( \frac{dV}{ds} \right)^2 - \frac{d^2 V}{ds^2},$$

$$\mu = \omega + \omega \cot V \sin \varphi.$$

Cette forme est peu intéressante par elle-même; mais, si l'on remarque que la seconde partie représente le carré de la différentielle de l'arc des conjuguées des coniques (à un facteur près), on voit que les trajectoires orthogonales de ces conjuguées sont fournies par l'équation

$$\omega \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} + \omega^2 \cot V \cos^2 \varphi + \left( 3\omega \cot V \frac{dV}{ds} - \frac{d\omega}{ds} \right) \cos \varphi + 2 \cot V \left( \frac{dV}{ds} \right)^2 - \frac{d^2 V}{ds^2} = 0.$$

Cette dernière, où l'on prend  $\cos \varphi$  comme inconnue, est une équation de Riccati. Il n'en résulte pas cependant que les coniques de la surface soient partagées homographiquement par les trajectoires orthogonales des conjuguées, car leurs coordonnées ne s'expriment pas rationnellement au moyen de  $\cos \varphi$ . On remarquera encore que l'équation à intégrer ne dépend pas de la torsion de la courbe décrite par le sommet du cône.

---

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE JACOBI  
POUR INTÉGRER  
UNE SEULE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A UNE FONCTION INCONNUE

DONT LES DÉRIVÉES Y ENTRENT LINÉAIREMENT, AU CAS D'UN SYSTÈME PASSIF  
D'ÉQUATIONS DE CETTE SORTE EN NOMBRE QUELCONQUE,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

---

1. La solution, maintenant classique, donnée par Jacobi au problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire, est extrêmement remarquable parce qu'elle semble marquer d'un premier jalon la route à suivre pour venir à bout du problème si ardu et si important de la recherche des intégrales d'un système quelconque d'équations différentielles : *ramener ce système à la forme linéaire* (ce qui est facile), *puis faire dépendre son intégration de celle d'un système auxiliaire dont les intégrales contiennent comme éléments d'indétermination, non plus des fonctions, mais de simples constantes arbitraires*. A ce titre, aucune extension de la méthode de Jacobi n'est dépourvue d'intérêt, si limitée d'ailleurs qu'elle soit. Je vais en indiquer une des plus naturelles et profiter de l'occasion pour améliorer en plusieurs points la démonstration en usage.

Je commencerai par l'exposition sommaire de certaines considérations générales, qui sont indispensables pour traiter la question et même pour la poser convenablement.

2. Pour exprimer qu'à partir de tout système de valeurs particu-

lières de  $x, y, \dots$  tombant à l'intérieur d'aires données  $S_x, S_y, \dots$ ,  $f(x+h, y+k, \dots)$  est développable en une série entière par rapport à  $h, k, \dots$ , dont les rayons de convergence sont au moins égaux à des quantités positives données  $\delta_x, \delta_y, \dots$ , je dis que la fonction  $f(x, y, \dots)$  est *olotrope* dans les aires  $S_x, S_y, \dots$  avec les *olomètres*  $\delta_x, \delta_y, \dots$ .

Puis, revenant aux idées de Lagrange, j'appelle simplement *dérivée* de  $f(x, y, \dots)$  d'ordres  $p, q, \dots$  par rapport à  $x, y, \dots$  respectivement, le produit  $f^{(p,q,\dots)}(x, y, \dots)$  obtenu en multipliant par  $(1, 2, \dots, p)(1, 2, \dots, q) \dots$  le coefficient de  $h^p k^q, \dots$  dans la série dont il s'agit.

A ce point de vue, *les intégrales des équations différentielles ne peuvent être conçues autrement qu'olotropes*, puisque, si elles ne jouissaient pas de cette propriété, on ne saurait même pas former leurs dérivées dont la substitution dans ces équations est exigée par leur vérification.

3. Un système quelconque d'équations différentielles étant donné, des moyens très simples en théorie permettent toujours de l'amener, cela même souvent de plusieurs manières, à la forme spéciale que j'ai nommée *immédiate* et sur laquelle seulement il devient possible d'établir des propositions générales.

Les caractères fondamentaux d'un système immédiat sont les suivants :

1. *Il est du premier ordre par rapport à toutes les fonctions inconnues, et les équations qui le composent ont pour premiers membres des dérivées (premières) des fonctions inconnues, pour seconds membres des fonctions composées données, tant des variables indépendantes que des fonctions inconnues et de celles de leurs dérivées (premières) qui ne figurent dans aucun premier membre.*

Pour la clarté des choses, il convient d'écrire ces équations dans les cases d'un Tableau quadrillé, en plaçant toujours dans une même colonne celles dont les premiers membres sont des dérivées d'une même fonction inconnue, toujours dans une même ligne celles dont les premiers membres sont des dérivées de diverses fonctions inconnues prises par rapport à une même variable.

II. Pour chaque fonction inconnue, j'ai appelé *principales*, celles des variables indépendantes par rapport auxquelles sont prises les dérivées de cette fonction constituant les premiers membres des équations de la colonne correspondante du Tableau du système, et *paramétriques*, les variables qui ne sont pas principales pour la même fonction.

J'ai appelé encore *dérivées paramétriques* d'une fonction inconnue, ses dérivées de tous ordres engendrées par des différentiations intéressant ses variables paramétriques seules, à l'exclusion de toute variable principale, et *dérivées principales*, toutes celles dont la formation exige une différentiation au moins par rapport à quelque variable principale.

En différentiant de toutes les manières possibles les équations du système considéré, on obtient une infinité d'autres équations différentielles auxquelles les fonctions inconnues doivent également satisfaire, et les premiers membres de l'ensemble fourni par ces nouvelles équations et par les proposées sont précisément les diverses dérivées principales de ces fonctions. Quand le nombre des variables principales pour quelque fonction inconnue surpasse 1, on peut même retrouver une même dérivée principale dans les premiers membres de *plusieurs* équations distinctes de l'ensemble en question.

Cela posé, le second caractère d'un système immédiat consiste en ce qu'il est possible de ranger les équations de l'ensemble indéfini dont il s'agit, dans un ordre tel, que toutes les dérivées principales figurant dans leurs seconds membres puissent en être éliminées par la simple substitution faite à chacune d'elles, de l'une de ses expressions débarrassée de toute dérivée principale, que les éliminations antérieures ont fournies.

Cette élimination progressive des dérivées principales transforme l'ensemble des équations différentielles dont nous venons de parler en un autre équivalent, qui fournit ainsi toutes les dérivées principales des fonctions inconnues (cela souvent même de plus d'une manière) en fonctions composées des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques seulement.

J'ai appelé *ultimes*, les expressions spéciales des dérivées principales et aussi les formules les fournissant, qui résultent des éliminations successives ci-dessus mentionnées.

4. Les intégrales possibles d'un système immédiat se partagent en deux classes à distinguer soigneusement :

I. Les intégrales *ordinaires* dont les valeurs à elles-mêmes et à leurs dérivées paramétriques tombent toujours, avec les valeurs des variables indépendantes auxquelles elles correspondent, en dedans des limites où les fonctions composantes qui ont servi à former les seconds membres des équations différentielles du système proposé sont toutes olotropes ;

II. Les intégrales *singulières* pour lesquelles une au moins de ces composantes cesse d'être olotrope dans les circonstances ci-dessus définies (1).

5. On ne peut pas différentier les équations proposées après y avoir substitué des intégrales singulières aux fonctions inconnues, parce que, si les fonctions simples entrant dans leurs seconds membres sont olotropes, les composantes ayant servi à former ceux-ci ne le sont plus toutes, et qu'ainsi les conditions essentielles de la règle de différentiation des fonctions composées ne sont plus remplies. Les formules ultimes ne sont donc pas applicables à de pareilles intégrales, et leur existence même est précaire. Leur recherche (quand il y en a) se ramène toujours, en dernière analyse, à celle des intégrales ordinaires de quelque système immédiat auxiliaire.

6. Mais les formules ultimes sont applicables aux intégrales ordinaires. En appelant alors

$$(1) \quad x_0, y_0, \dots$$

un système de valeurs initiales attribuées aux variables indépendantes  $x, y, \dots$ , elles donnent, quand on y réalise l'hypothèse numérique  $x = x_0, y = y_0, \dots$ , les valeurs initiales de toutes les dérivées principales d'un groupe déterminé de semblables intégrales, exprimées au moyen de celles des variables indépendantes, de ces intégrales elles-mêmes et de leurs dérivées paramétriques.

Si donc on connaît simplement ces deux dernières sortes de valeurs initiales ou, ce qui revient au même, pour chaque intégrale, sa détermination initiale, je veux dire la fonction de ses seules variables paramétriques à

laquelle la réduit l'attribution à ses variables principales de leurs valeurs dans la suite (1), les formules ultimes fournissent tous les éléments complémentaires qui sont nécessaires à la reconstruction par la formule de Taylor, des développements des intégrales considérées en séries entières par rapport aux différences  $x - x_0$ ,  $y - y_0$ , ....

Il résulte de cette observation qu'on obtiendra les seules fonctions pouvant être des intégrales ordinaires, en sommant toutes les séries convergentes que peuvent ainsi fournir les formules ultimes, quand on adopte pour déterminations initiales hypothétiques des fonctions inconnues, tous les systèmes imaginables de fonctions de leurs divers groupes de variables paramétriques [à condition, bien entendu, que ces dernières fonctions soient olotropes, que leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées premières tombent avec les quantités (1) en dedans des limites où les composantes des seconds membres des équations différentielles proposées sont toutes olotropes].

7. Dans cette recherche des intégrales ordinaires, il faut encore distinguer deux cas bien différents :

I. *Il y a des dérivées principales des fonctions inconnues, pour chacune desquelles les formules ultimes donnent plusieurs expressions en fonctions composées à composantes distinctes, des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.*

Ce cas ne peut se présenter que si quelque fonction inconnue offre plus d'une variable principale. Quand on s'y trouve, la coïncidence numérique indispensable entre les valeurs initiales fournies par les formules ultimes, pour une même dérivée principale de cette espèce, est essentiellement subordonnée à la possibilité de choisir les déterminations initiales de manière à l'assurer. Cette possibilité n'existe pas toujours non plus que les intégrales; à cause de leur existence contingente analogue à celle des intégrales singulières, je leur ai donné le nom d'intégrales exceptionnelles.

II. *Au contraire, les formules ultimes fournissent toujours, pour une dérivée principale quelconque, soit une seule expression, soit plusieurs qui sont identiques les unes aux autres.*

La coïncidence numérique mentionnée ci-dessus est alors assurée,



quelles que soient les fonctions des variables paramétriques choisies pour déterminations initiales des fonctions inconnues. Pour exprimer que le système des équations différentielles considérées jouit de cette propriété, je dis qu'il est *passif*.

Les systèmes passifs sont de beaucoup les plus importants, et la recherche des intégrales exceptionnelles d'un système qui ne l'est pas revient toujours finalement à l'intégration d'un système auxiliaire qui l'est.

8. En appelant *complexes* les dérivées principales d'une fonction inconnue, dont les différentiations génératrices intéressent plusieurs variables principales différentes, la condition nécessaire à la *passivité* d'un système immédiat d'équations différentielles se formule dans les termes suivants :

*Il faut et il suffit, ou bien qu'aucune fonction inconnue n'ait de dérivées complexes, c'est-à-dire que, pour chacune d'elles, le nombre des variables qui sont principales se réduise soit à 0, soit à 1, ou bien que, pour chacune de leurs dérivées complexes du second ordre, les expressions fournies par les formules ultimes soient des fonctions composées à composantes toutes identiques, tant des variables indépendantes que des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.*

9. *La convergence des développements des intégrales hypothétiques d'un système immédiat passif et, par suite, l'existence effective d'intégrales répondant à des déterminations initiales données, sont certaines dans le cas où ce système est, en outre, régulier ou bien semi-régulier, mais incertaines dans les autres cas.*

Pour abréger, je n'entrerai dans aucun développement sur cette condition complémentaire qui est remplie pour les systèmes que nous avons à considérer ici.

10. *Quand les développements dont il s'agit sont convergents, leurs sommes sont toujours des intégrales du système des équations différentielles considérées.*

11. Les diverses propositions qui précèdent sont exposées en détail dans deux Mémoires que j'ai publiés récemment avec le concours de



M. Riquier (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. VI et VII; 1889 et 1890); celles que je vais encore énoncer le seront bientôt dans l'Ouvrage en préparation dont ces deux Mémoires ont été extraits.

Les systèmes immédiats se partagent en deux grandes classes, selon la qualification des variables indépendantes relativement aux fonctions inconnues.

La première contient les systèmes d'équations différentielles *totales*, pour chaque fonction inconnue desquels *toutes* les variables sont principales.

En appelant  $g$  le nombre des fonctions inconnues  $u, v, \dots$ ;  $h$  celui des variables indépendantes  $x, y, \dots$ ; et  $U_x, U_y, \dots, V_x, V_y, \dots, gh$  composantes données à  $h + g$  places, un pareil système est de la forme

$$(2) \begin{cases} \frac{du}{dx} = U_x(x, y, \dots, u, v, \dots), & \frac{dv}{dx} = V_x(x, y, \dots, u, v, \dots), & \dots; \\ \frac{du}{dy} = U_y(x, y, \dots, u, v, \dots), & \frac{dv}{dy} = V_y(x, y, \dots, u, v, \dots), & \dots; \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots \end{cases}$$

Les seconds membres ne contiennent aucune dérivée; les déterminations initiales des intégrales se réduisent aux simples constantes qui constituent leurs valeurs initiales. Il y a  $g \frac{h(h-1)}{1.2}$  conditions de passivité dont le type est

$$\frac{dU_x}{dy} + \frac{dU_x}{du} U_y + \frac{dU_x}{dv} V_y + \dots = \frac{dU_y}{dx} + \frac{dU_y}{du} U_x + \frac{dU_y}{dv} V_x + \dots \left( = \frac{d^2 u}{dx dy} \right),$$

quelles que soient  $x, y, \dots, u, v, \dots$ , considérées un instant comme  $h + g$  variables, toutes indépendantes les unes des autres.

La deuxième classe contient tous les systèmes dans lesquels une variable au moins est paramétrique pour quelque fonction inconnue; on peut les appeler des systèmes d'équations différentielles *partielles*. Elle comprend notamment toutes les équations dites *aux dérivées partielles*.

La variété sans limite des systèmes de cette sorte en rend impossible toute notation précise. Leurs propriétés générales ne sont encore qu'entrevenues. On considère leur intégration comme achevée quand on

l'a ramenée à celle d'un système auxiliaire d'équations différentielles totales. C'est précisément une réduction de ce genre que nous allons exécuter.

12. Nous aurons à nous appuyer sur ces diverses propositions générales concernant le système (2).

I. *Quand il est passif, toutes ses intégrales ordinaires sont contenues dans des intégrales générales*

$$(3) \quad \begin{cases} u = v(x, y, \dots, C_1, C_2, \dots, C_g), \\ u = \varphi(x, y, \dots, C_1, C_2, \dots, C_g), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

*formules où  $v, \varphi, \dots$  sont  $g$  certaines fonctions olotropes de  $x, y, \dots$  et de  $g$  nouvelles variables (ou constantes arbitraires)  $C_1, C_2, \dots, C_g$ , dont le déterminant différentiel par rapport à  $C_1, C_2, \dots, C_g$  (déterminant des  $g^2$  dérivées premières de ces  $g$  fonctions prises par rapport à ces  $g$  variables) est essentiellement différent de 0.*

II. *La résolution des formules (3) par rapport aux constantes arbitraires donne les  $g$  équations*

$$\begin{aligned} C_1 &= \Gamma_1(x, y, \dots, u, v, \dots), \\ C_2 &= \Gamma_2(x, y, \dots, u, v, \dots), \\ &\dots\dots\dots, \\ C_g &= \Gamma_g(x, y, \dots, u, v, \dots), \end{aligned}$$

*dans lesquelles, en considérant un instant  $x, y, \dots, u, v, \dots$  comme  $h + g$  variables indépendantes, les  $g$  fonctions  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_g$  sont olotropes et ont, par rapport aux  $g$  variables  $u, v, \dots$ , un déterminant différentiel non identiquement nul.*

III. Chacune de ces fonctions  $\Gamma$  satisfait au système de  $h$  équations différentielles partielles

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\Gamma}{dx} + U_x \frac{d\Gamma}{du} + V_x \frac{d\Gamma}{dv} + \dots = 0, \\ \frac{d\Gamma}{dy} + U_y \frac{d\Gamma}{du} + V_y \frac{d\Gamma}{dv} + \dots = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

13. Nous aurons encore besoin du théorème suivant, emprunté à une autre théorie :

*Si les  $\frac{n(n-1)\dots(n-m)}{1.2\dots(m+1)}$  déterminants différentiels des  $m+1$  fonctions*

$$\begin{aligned} & f_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \\ & f_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \\ & \dots\dots\dots, \\ & f_m(t_1, t_2, \dots, t_n), \\ & f(t_1, t_2, \dots, t_n), \end{aligned}$$

*pris par rapport à toutes les combinaisons  $m+1$  à  $m+1$  des  $n(>m)$  variables indépendantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sont tous identiquement nuls et si, parmi les  $\frac{m(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m}$  déterminants différentiels des  $m$  premières pris par rapport aux diverses combinaisons  $m$  à  $m$  des mêmes variables, il s'en trouve au moins un qui ne l'est pas, la dernière fonction  $f$  se réduit à quelque fonction composée des  $m$  premières.*

14. Nous pouvons maintenant aborder le problème à résoudre :

*Trouver toutes les intégrales ordinaires d'un système immédiat passif de  $p$  équations différentielles*

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{du}{dx_1} = -A_{1,0} + A_{1,1} \frac{du}{du_1} + \dots + A_{1,q} \frac{du}{du_q}, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{du}{dx_p} = -A_{p,0} + A_{p,1} \frac{du}{du_1} + \dots + A_{p,q} \frac{du}{du_q}, \end{cases}$$

*à une seule fonction inconnue  $u$  des  $p$  variables principales  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , et des  $q$  variables paramétriques  $u_1, u_2, \dots, u_q$ , toutes ces équations étant essentiellement supposées linéaires par rapport aux dérivées de  $u$ , et, par suite,  $\dots, A_{m,i}, \dots$  désignant certaines fonctions composées données,  $\dots, A_{m,i}(x_1, x_2, \dots, x_p, u_1, u_2, \dots, u_q, u), \dots$  de  $x_1, x_2, \dots, x_p, u_1, u_2, \dots, u_q, u$  seulement.*

1. Nous avons d'abord à former les conditions de passivité du système (5).

La différentiation par rapport à  $x_n$  de la  $m^{\text{ième}}$  équation donne une

première expression *primitive* de la dérivée complexe seconde  $\frac{d^2 u}{dx_m dx_n}$ , savoir

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx_m dx_n} = & -\frac{d\Lambda_{m,0}}{dx_n} + \sum_{i=1}^{i=q} \frac{d\Lambda_{m,i}}{dx_n} \frac{du}{du_i} \\ & + \left( -\frac{d\Lambda_{m,0}}{du} + \sum_{i=1}^{i=q} \frac{d\Lambda_{m,i}}{du} \frac{du}{du_i} \right) \frac{du}{dx_n} + \sum_{i=1}^{i=q} \Lambda_{m,i} \frac{d^2 u}{du_i dx_n}. \end{aligned}$$

En y substituant à  $\frac{du}{dx_n}$  le second membre de la  $n^{\text{ième}}$  équation (5) et à  $\frac{d^2 u}{du_i dx_n}$  celui de la même équation différentiée par rapport à  $u_i$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{du_i dx_n} = & -\frac{d\Lambda_{n,0}}{du_i} + \sum_{j=1}^{j=q} \frac{d\Lambda_{n,j}}{du_i} \frac{du}{du_j} \\ & + \left( -\frac{d\Lambda_{n,0}}{du} + \sum_{j=1}^{j=q} \frac{d\Lambda_{n,j}}{du} \frac{du}{du_j} \right) \frac{du}{du_i} + \sum_{j=1}^{j=q} \Lambda_{n,j} \frac{d^2 u}{du_i du_j}, \end{aligned}$$

on obtient une première expression ultime  $[m, n]$  de la même dérivée complexe seconde.

On trouve ainsi (en modifiant très légèrement la notation des indices courants)

$$\begin{aligned} [m, n] = & -\frac{d\Lambda_{m,0}}{dx_n} + \Lambda_{n,0} \frac{d\Lambda_{m,0}}{du} - \sum_{i=1}^{i=q} \Lambda_{m,i} \frac{d\Lambda_{n,0}}{du_i} \\ & + \sum_{j=1}^{j=q} \left[ \left( \frac{d\Lambda_{m,j}}{dx_n} - \Lambda_{n,0} \frac{d\Lambda_{m,j}}{du} + \sum_{i=1}^{i=q} \Lambda_{m,i} \frac{d\Lambda_{n,j}}{du_i} - \Lambda_{m,j} \frac{d\Lambda_{n,0}}{du} - \Lambda_{n,j} \frac{d\Lambda_{m,0}}{du} \right) \frac{du}{du_j} \right] \\ & + \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=q} \frac{d(\Lambda_{m,i} \Lambda_{n,j})}{du} \frac{du}{du_i} \frac{du}{du_j} + \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=q} \Lambda_{m,i} \Lambda_{n,j} \frac{d^2 u}{du_i du_j}. \end{aligned}$$

Si maintenant on permute  $m, n$  dans cette formule, on obtient une deuxième et dernière expression ultime possible  $[n, m]$  de  $\frac{d^2 u}{dx_m dx_n}$ , et la relation

$$(6) \quad [m, n] = [n, m],$$

quelles que soient  $x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q, u$  et les dérivées paramé-

triques premières et secondes  $\frac{du}{du_i}, \frac{d^2u}{du_i^2}, \frac{d^2u}{du_i du_j}$  (toutes ces quantités étant considérées comme autant de variables indépendantes les unes des autres) fournit le type des conditions de passivité du système (5). Pour les écrire toutes, il suffit de substituer successivement à  $m, n$  toutes les combinaisons deux à deux des entiers  $1, 2, \dots, p$ .

Comme les dérivées paramétriques entrent d'une manière entière dans les deux membres de la condition générale (6), on les décomposera en d'autres intéressant des fonctions de  $x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q, u$  seulement, en égalant dans les deux membres les coefficients des termes qui sont semblables relativement à ces dérivées. Si l'on néglige celles de ces nouvelles conditions qui sont satisfaites d'elles-mêmes et si l'on écrit convenablement les autres après la suppression des termes qui s'y détruisent, il reste définitivement les conditions

$$(7) \quad -\frac{dA_{m,J}}{dx_n} + \sum_{i=0}^{I=J} \frac{dA_{m,i}}{du_i} A_{n,i} = -\frac{dA_{n,J}}{dx_m} + \sum_{i=0}^{I=J} \frac{dA_{n,i}}{du_i} A_{m,i},$$

quelles que soient  $x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q, u$ .

Dans chacune d'elles, il faut lire  $\frac{d}{du}$ , partout où le jeu des notations conduit à écrire  $\frac{d}{du_0}$ . Il faut ensuite, pour les former toutes, prendre successivement pour  $J$  les nombres  $0, 1, 2, \dots, q$ , puis pour  $m, n$  toutes les combinaisons deux à deux des entiers  $1, 2, \dots, p$ . Leur nombre total est ainsi égal à  $(q+1) \frac{p(p-1)}{1,2}$  et nous les supposons toutes satisfaites.

II. *L'intégrale particulière du système (5) qui, pour  $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_p = x_p^{(0)}$ , a pour détermination initiale*

$$u^{(0)} + \varphi(u_1, u_2, \dots, u_q),$$

*$u^{(0)}$  désignant une constante arbitraire et  $\varphi(u_1, \dots, u_q)$  une fonction olotrope des variables paramétriques s'annulant quand celles-ci prennent leurs valeurs initiales  $u_1^{(0)}, \dots, u_q^{(0)}$ , est de la forme*

$$(8) \quad u = \psi(x_1, \dots, x_p, u_1, u_2, \dots, u_q, u^{(0)}),$$



Cette fonction satisfaisant au système (5), comme nous l'avons vu dans l'alinéa II, et la différentiation de l'équation précédente donnant

$$(10) \quad \frac{du}{dx_m} = - \frac{\frac{d\Gamma}{dx_m}}{\frac{d\Gamma}{du}}, \quad \frac{du}{du_i} = - \frac{\frac{d\Gamma}{du_i}}{\frac{d\Gamma}{du}},$$

elle satisfait aussi aux équations (9), pourvu qu'on y considère  $u$ , non pas comme une nouvelle variable indépendante, mais bien toujours comme une fonction de  $x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q$ . Cela posé, si, dans les équations (9) envisagées de cette manière, on fait  $x_m = \xi_m$ ,  $u_i = z_i$ ,  $u$  prend la valeur  $z$ . Ces mêmes équations subsistent donc encore pour les valeurs quelconques  $\xi_1, \dots, \xi_p, z_1, \dots, z_q, z$  des quantités  $x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q$  quand on les considère comme les  $p + q + 1$  variables indépendantes de la fonction  $\Gamma$ .

Il est évident d'ailleurs que  $\Gamma$  est une intégrale ordinaire du système (9); car,  $u$  étant une intégrale de cette espèce pour le système (5), les coefficients  $\dots, \Lambda_{m,i}, \dots$  sont tous olotropes pour les valeurs correspondantes de  $x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q$  et de  $u$ , lesquelles sont indépendantes les unes des autres à cause de la relation (8) et de l'indétermination absolue de  $u^{(0)}$ .

IV. Réciproquement, toute intégrale ordinaire  $\Gamma$  du système (9), dont la dérivée par rapport à  $u$  n'est pas identiquement nulle, fournit, quand on l'égale à une constante arbitraire  $u^{(0)}$ , une équation dont la racine  $u$  est, quel que soit  $u^{(0)}$ , une intégrale ordinaire du système proposé (5).

C'est ce que rendent évident la division des équations (9) par  $-\frac{d\Gamma}{du}$  et la prise en considération des formules (10).

Ainsi donc, pour obtenir toutes les intégrales ordinaires du système proposé (5), il suffit de résoudre par rapport à  $u$  les équations formées en égalant à des constantes arbitraires toutes les intégrales ordinaires du système (9), dont les dérivées par rapport à  $u$  ne sont pas identiquement nulles.

V. Le système (9) est passif.

Il est évident, en effet, que ses conditions de passivité, formées comme dans l'alinéa I pour le système (5), se résolvent exactement dans les conditions (7) que nous supposons essentiellement satisfaites.

VI. En considérant maintenant  $u, u_1, \dots, u_q$  comme  $q + 1$  fonctions des  $p$  variables indépendantes  $x_1, \dots, x_p$ , le système des équations différentielles totales

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{du}{dx_1} = -A_{1,0}, & \frac{du_1}{dx_1} = -A_{1,1}, & \dots, & \frac{du_q}{dx_1} = -A_{1,q}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, \\ \frac{du}{dx_p} = -A_{p,0}, & \frac{du_1}{dx_p} = -A_{p,1}, & \dots, & \frac{du_q}{dx_p} = -A_{p,q}, \end{cases}$$

est passif.

Car la condition exprimant que les deux expressions ultimes de  $\frac{d^2 u_i}{dx_m dx_n}$  sont égales entre elles, quelles que soient  $a_1, \dots, a_p; u, u_1, \dots, u_q$ , est précisément celle des conditions de passivité (7) qui a été écrite en évidence (11).

VII. Les fonctions  $\Gamma_1(x_1, \dots, x_p, u, u_1, \dots, u_q), \Gamma_2, \dots, \Gamma_{q+1}$ , obtenues en résolvant, par rapport à leurs  $q + 1$  constantes arbitraires, les formules qui donnent les intégrales générales du système (11), constituent autant d'intégrales ordinaires du système (9), dont le déterminant différentiel, par rapport à  $u, u_1, \dots, u_q$  n'est pas identiquement nul.

Ces deux points sont de simples conséquences particulières des propositions générales énoncées ci-dessus (n° 12, II, III) sur les systèmes d'équations différentielles totales.

VII. Toute intégrale ordinaire  $\Gamma$  du système (9) se réduit à quelque fonction composée des fonctions  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{q+1}$ .

Les  $q + 2$  équations linéaires coexistant entre les  $q + 2$  quantités  $1, -A_{1,0}, \dots, -A_{1,q}$  dont la première n'est pas nulle,

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d\Gamma_1}{dx_1} - \frac{d\Gamma_1}{du} A_{1,0} - \dots - \frac{d\Gamma_1}{du_q} A_{1,q} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{d\Gamma_{q+1}}{dx_1} - \frac{d\Gamma_{q+1}}{du} A_{1,0} - \dots - \frac{d\Gamma_{q+1}}{du_q} A_{1,q} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{d\Gamma}{dx_1} - \frac{d\Gamma}{du} A_{1,0} - \dots - \frac{d\Gamma}{du_q} A_{1,q} = 0, \end{cases}$$



entraînent immédiatement l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Gamma_1}{du} & \dots & \frac{d\Gamma_1}{du_q} & \frac{d\Gamma}{dx_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\Gamma_{q+1}}{du} & \dots & \frac{d\Gamma_{q+1}}{du_q} & \frac{d\Gamma_{q+1}}{dx_1} \\ \frac{d\Gamma}{du} & \dots & \frac{d\Gamma}{du_q} & \frac{d\Gamma}{dx_1} \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on prouve de la même manière que les autres déterminants différentiels des fonctions  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{q+1}, \Gamma$  pris par rapport à toutes les combinaisons de leurs  $q+1$  variables  $u, u_1, \dots, u_q$ , avec soit  $x_2$ , soit  $x_3, \dots$ , soit  $x_p$  sont tous identiquement nuls. Comme, en vertu des groupes de relations linéaires analogues à (12), chacun des autres déterminants différentiels de ces  $q+2$  fonctions se réduit à une expression où les précédents entrent d'une manière linéaire et homogène, tous aussi sont nuls identiquement. La dernière fonction  $\Gamma$  est donc composée des autres  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{q+1}$  (13), puisque le déterminant différentiel de ces  $q+1$  dernières, par rapport à  $u, u_1, \dots, u_q$ , n'est pas nul (VII).

IX. Il est évident, réciproquement, que toute fonction composée d'intégrales du système (9) en est une aussi. *On obtiendra donc toutes les intégrales de ce système en prenant toutes les fonctions composées possibles des fonctions  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{q+1}$ .*

X. La marche à suivre pour intégrer le système proposé (5) est donc exactement celle indiquée par Jacobi pour le cas d'une seule variable principale :

*On écrira le système auxiliaire (11) d'équations différentielles totales; on obtiendra les fonctions  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{q+1}$  en résolvant, par rapport aux constantes arbitraires qu'elles contiennent, les formules fournissant ses intégrales générales; on résoudra enfin, par rapport à  $u$ , l'équation*

$$\Omega(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{q+1}) = 0,$$

*formée en égalant à 0 (ce qui revient au même que si l'on égalait à une constante arbitraire) une fonction composée de  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{q+1}$ , dont la composante  $\Omega$  est arbitraire, sauf la condition d'engendrer une fonction composée dont la dérivée par rapport à  $u$  ne soit pas identiquement nulle.*

15. Comme application très simple, considérons le cas où les fonctions  $A_{i,j}$  sans indice nul se réduisent à des constantes, et où l'on a

$$A_{1,0} = -a_1 u - V_1, \quad A_{2,0} = -a_2 u - V_2, \quad \dots, \quad A_{p,0} = -a_p u - V_p,$$

$a_1, a_2, \dots, a_p$  désignant aussi des constantes quelconques et  $V_1, V_2, \dots, V_p$  des fonctions données des variables principales  $x_1, \dots, x_p$ , c'est-à-dire où le système (5) se compose exclusivement d'équations linéaires proprement dites et à coefficients constants, avec ou sans seconds membres fonctions des variables principales.

Les conditions de passivité (7) se réduisent alors à

$$a_i V_j + \frac{dV_i}{dx_j} = a_j V_i + \frac{dV_j}{dx_i}.$$

Quand elles sont satisfaites, l'expression

$$e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_p x_p} (V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \dots + V_p dx_p)$$

est une différentielle exacte, et, en représentant par  $U$  quelque détermination de son intégrale indéfinie, la résolution des équations intégrales générales du système auxiliaire (11) par rapport à leurs constantes arbitraires donne immédiatement

$$\Gamma_1 = \frac{u}{e^{a_1 x_1 + \dots + a_p x_p}} - U,$$

avec

$$\Gamma_{1+i} = u_i + A_{1,i} x_1 + A_{2,i} x_2 + \dots + A_{p,i} x_p$$

pour  $i = 1, 2, \dots, q$ .

En appelant donc  $\omega(\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{q+1})$  une fonction composante arbitraire de  $q$  variables, l'intégrale générale du système considéré est

$$u = [\omega(\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{q+1}) + U] e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p},$$

formule dont l'exactitude est évidente.

De simples quadratures permettraient encore d'achever les calculs, si  $V_1, \dots, V_p$  contenaient en outre les variables paramétriques  $u_1, u_2, \dots, u_q$ , ou bien si les seconds membres des équations (11) étaient tous des expressions linéaires à coefficients constants en  $u, u_1, \dots, u_q$  augmentées de fonctions de  $x_1, x_2, \dots, x_p$ .



---

RECHERCHES  
SUR LES  
SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE  
ET SUR  
CERTAINES SURFACES QUI S'Y RATTACHENT,

PAR M. C. GUICHARD,  
CHARGÉ D'UN COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND.

---

Les trois groupes suivants de surfaces : 1° les surfaces  $F$  à courbure totale constante; 2° les nappes focales  $S_1$ ,  $S_2$  d'une congruence  $C$ , telle que les développables de  $C$  touchent  $S_1$  et  $S_2$  suivant leurs lignes de courbure; 3° les surfaces  $\Sigma$  qui admettent un réseau conjugué formé de lignes géodésiques, ont entre eux des relations très étroites.

Établir les relations qui existent, soit entre les surfaces d'un même groupe, soit entre surfaces de groupes différents; profiter de ces relations pour déduire de surfaces connues d'autres surfaces: tel est le but que je me propose dans ce travail.

Les surfaces à courbure totale constante sont étudiées depuis longtemps. Je ramène leur détermination à l'intégration de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi$$

et à la résolution d'une équation de Riccati, ce qui, au fond, ne diffère pas de la méthode de M. Weingarten. Malheureusement, on n'a pas pu jusqu'ici intégrer l'équation (1); la recherche des surfaces à courbure constante est une des questions difficiles en Géométrie. On a cherché alors des méthodes qui permettent de déduire d'une surface  $F$  connue une infinité de surfaces analogues.

Parmi ces méthodes, je citerai surtout celle de M. Bäcklund, qui comprend comme cas particulier celle de MM. Bianchi et Ribeaucour. M. Bäcklund montre que, si, dans une congruence, la distance focale est constante, si, de plus, les plans focaux font un angle constant, les surfaces focales sont des surfaces à courbure constante. J'ai donné une nouvelle expression analytique de la transformation de M. Bäcklund, parce que certains résultats ainsi obtenus me sont utiles dans la recherche de quelques surfaces  $S$  particulières.

Les surfaces  $S$  et  $\Sigma$  n'ont pas encore été étudiées jusqu'ici. Je montre qu'un couple  $S_1, S_2$  peut être obtenu à l'aide de quadratures quand on connaît une surface  $F$  rapportée à ses lignes asymptotiques et une solution de l'équation correspondante

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \rho \cos \varphi.$$

L'équation (2) admet comme solutions particulières  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ ; dans ce cas, l'une des surfaces  $S_1, S_2$  est une sphère. La congruence formée par les tangentes communes à deux sphères est évidemment une congruence  $C$ ; il y correspond des solutions particulières de l'équation (1), qu'on peut obtenir par des quadratures elliptiques.

Les cosinus  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  de la normale à  $F$  sont solutions de l'équation (2); il y correspond des congruences  $C$ , dont la surface centrale est un plan.

Enfin l'équation (2) admet une infinité de systèmes distincts de trois solutions  $\xi, \eta, \zeta$  liées par la relation

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \text{const.},$$

$f$  étant homogène et du second ordre. Les surfaces  $S$  correspondantes sont telles que les lignes de courbure d'un système sont coupées sous un angle constant par les rayons vecteurs issus d'un point fixe.

La détermination analytique des surfaces  $\Sigma$  est identique à celle des surfaces  $S$ . Les coordonnées du plan tangent à  $\Sigma$  sont en effet  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  et  $\rho, \rho$  étant une solution quelconque de (2).

Entre les surfaces  $S$  et  $\Sigma$  il y a une relation géométrique simple. L'une des nappes de la surface des centres de courbure de  $S$  est une

surface  $\Sigma$ . Inversement, les tangentes aux géodésiques conjuguées de  $\Sigma$  sont normales à des surfaces  $S$ .

Il en résulte que, lorsqu'une congruence  $C$  est donnée, on peut en général en déduire une infinité d'autres. La méthode de transformation pourra être continuée tant que la surface  $\Sigma$  obtenue existera réellement, c'est-à-dire tant qu'on ne tombera pas sur une surface  $S$  qui est une sphère.

Au point de vue analytique, il y correspond une transformation de l'équation (2); les seules solutions que cette transformation multiplie par un facteur constant sont les solutions  $\xi, \eta, \zeta$ .

### I. — Détermination des surfaces $S$ .

Soient  $x, y, z$  les coordonnées d'un point  $M$ , d'une surface  $S$ ; ces coordonnées sont exprimées en fonction de deux variables  $u$  et  $v$ ; de plus, nous supposons que les courbes de paramètres  $u$  et  $v$  sont les lignes de courbures de la surface; enfin nous supposerons que la congruence  $C$  est formée par les tangentes aux courbes  $v = \text{const.}$  Par le point  $M$ , nous ferons passer un trièdre trirectangle; l'axe des  $X$  normal à la surface a pour cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ ; l'axe des  $Y$  tangent à la courbe  $v = \text{const.}$  a pour cosinus directeurs  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ; enfin l'axe des  $Z$  tangent à la courbe  $u = \text{const.}$  a pour cosinus directeurs  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ . On sait (voir le *Cours de Géométrie* de M. Darboux) que l'on a les formules

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = r\alpha_1, & \frac{\partial x_1}{\partial u} = -r\alpha + p\alpha_2, & \frac{\partial x_2}{\partial v} = -p\alpha_1, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -q_1\alpha_2, & \frac{\partial x_1}{\partial v} = -p_1\alpha_2, & \frac{\partial x_2}{\partial u} = q_1\alpha - p_1\alpha_1, \end{cases}$$

$$(B) \quad \frac{\partial r}{\partial v} = -pq_1, \quad \frac{\partial q_1}{\partial u} = -rp_1, \quad \frac{\partial p_1}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} = rq_1,$$

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial u} = h\alpha_1, & \frac{\partial l}{\partial u} = hp_1, \\ \frac{\partial r}{\partial v} = l\alpha_2, & \frac{\partial h}{\partial v} = -lp, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les formules analogues, obtenues en remplaçant  $x$  et les  $\alpha$  par  $y$  et les  $\beta$  ou par  $z$  et les  $\gamma$ .

Cela posé, un point  $M_2$ , pris sur l'axe des  $Y$ , a pour coordonnées

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + \lambda \alpha_1, \\y_2 &= y_1 + \lambda \beta_1, \\z_2 &= z_1 + \lambda \gamma_1;\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2}{\partial u} &= \alpha_1 \left[ h + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right] - \lambda r \alpha + \lambda p \alpha_2, \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} &= \alpha_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \alpha_2 (l + \lambda p_1).\end{aligned}$$

Si  $M_2$  est le second foyer, on aura alors

$$\lambda = -\frac{l}{p_1}.$$

Le point  $M_2$  décrit alors une surface  $S_2$ , sur laquelle les courbes de paramètre  $u$  et  $v$  forment un réseau conjugué. Ce réseau sera formé de lignes de courbure si ces courbes sont orthogonales, c'est-à-dire si l'on a

$$h + \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0$$

ou bien

$$h - \frac{1}{p_1} \frac{\partial l}{\partial u} + \frac{l}{p_1^2} \frac{\partial p_1}{\partial u} = 0.$$

En tenant compte des équations C, on a la condition

$$\frac{\partial p_1}{\partial u} = 0.$$

En remplaçant  $v$  par une fonction de  $v$ , on pourra supposer alors

$$p_1 = 1.$$

De plus, les équations (B) donnent

$$r \frac{\partial r}{\partial v} + p \frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Un choix convenable de la variable  $u$  permet de supposer

$$r^2 + p^2 = 1.$$

Nous poserons alors

$$r = \sin \varphi, \quad p = -\cos \varphi.$$

Les équations (B) donnent ensuite

$$q_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi.$$

Si enfin dans les équations (C) on suppose  $l = -2\rho$ , on trouve

$$h = -2\frac{\partial \rho}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \rho \cos \varphi.$$

Ainsi, pour la surface  $S_1$ , rapportée à ses lignes de courbures, nous avons le tableau de formules

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial u} = \sin \varphi x_1, & \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\sin \varphi x - \cos \varphi x_1, & \frac{\partial x_2}{\partial u} = \cos \varphi x_1, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} x_1, & \frac{\partial x_1}{\partial v} = x_2, & \frac{\partial x_2}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} x - x_1, \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi$$

et

$$(C) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -2\frac{\partial \rho}{\partial u} x_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -2\rho x_2,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \rho \cos \varphi.$$

Le point correspondant de la surface  $S_2$  est donné par les formules

$$x_2 = x_1 + 2\rho x_1,$$

$$y_2 = y_1 + 2\rho \beta_1,$$

$$z_2 = z_1 + 2\rho \gamma_1.$$

Si l'on désigne par  $\alpha', \beta', \gamma'$  les cosinus directeurs de la normale à  $S_2$ ; par  $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$  les cosinus directeurs de la tangente aux courbes  $u = \text{const.}$ ; par  $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$  ceux de la tangente aux courbes  $v = \text{const.}$ ,

on aura la série de formules

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= -\alpha \cos \varphi + \alpha_2 \sin \varphi, \\
 \alpha'_1 &= -\alpha_1, \\
 \alpha'_2 &= \alpha \sin \varphi + \alpha_2 \cos \varphi; \\
 (A') \quad &\begin{cases} \frac{\partial \alpha'}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \alpha'_2, & \frac{\partial \alpha'_1}{\partial u} = \alpha'_2, & \frac{\partial \alpha'_2}{\partial u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \alpha' - \alpha'_1, \\ \frac{\partial \alpha'}{\partial v} = \sin \varphi \alpha'_1, & \frac{\partial \alpha'_1}{\partial v} = -\sin \varphi \alpha' - \cos \varphi \alpha'_2, & \frac{\partial \alpha'_2}{\partial v} = \cos \varphi \alpha'_1; \end{cases} \\
 (C') \quad &\begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial u} = -2\rho \alpha'_2 = -2\rho(\alpha \sin \varphi + \alpha_2 \cos \varphi), \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} = -2\frac{\partial \rho}{\partial v} \alpha'_1 = -2\frac{\partial \rho}{\partial v} \alpha_1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

On trouve facilement les rayons de courbure principaux des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ ; on a

$$\begin{aligned}
 \text{Pour la surface } S_1 \dots\dots\dots &\left\{ \begin{aligned} R_1 &= \frac{2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sin \varphi}, \\ R_2 &= \frac{2 \rho}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}, \end{aligned} \right. \\
 \text{Pour la surface } S_2 \dots\dots\dots &\left\{ \begin{aligned} R'_1 &= \frac{2 \varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}, \\ R'_2 &= \frac{2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

D'autre part, l'équation (1) montre que  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$  sont des solutions particulières de l'équation (2). Si l'on prend  $\rho = \pm m \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ , la surface  $S_1$  sera une sphère de rayon  $2m$ ; si, au contraire,  $\rho = \pm n \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ , la surface  $S_2$  sera une sphère de rayon  $2n$ . Ce sont d'ailleurs les seules solutions qui donnent des sphères.

Il peut se faire que les deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  soient des sphères.



Dans ce cas,  $\varphi$  satisfait à l'équation (1) et à une équation de la forme

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial v} = n \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

On peut alors déterminer  $\varphi$  par une quadrature elliptique.

Remarquons que la propriété des surfaces  $S$  ne dépend que de la représentation sphérique de ces surfaces. On peut, par exemple, remplacer la surface  $S$ , par une surface parallèle.

## II. — Propriété caractéristique des équations (2).

Les formules (A) du paragraphe précédent montrent que  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  sont des solutions particulières de l'équation (2). Réciproquement, toute équation de la forme

$$(a) \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M \vartheta,$$

qui admet trois solutions particulières,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , liées par la relation

$$(b) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

peut, par un choix convenable des variables  $u$  et  $v$ , faire partie du groupe des équations (2). J'ai montré déjà (1) que, si l'on pose

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

$\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sont trois solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = C \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + D \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - f \vartheta,$$

$$C = \frac{g \frac{\partial e}{\partial v} - f \frac{\partial g}{\partial u}}{2(e g - f^2)}, \quad D = \frac{-f \frac{\partial e}{\partial v} + e \frac{\partial g}{\partial u}}{2(e g - f^2)}.$$

$\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  vérifiant, par hypothèse, l'équation (a), on doit avoir

$$C = 0, \quad D = 0$$

ou

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

---

(1) Voir *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques*, etc. (*Annales de l'École Normale*, 1889).

On peut, en choisissant convenablement les variables  $u$  et  $v$ , poser

$$e = g = 1;$$

$f$  satisfait alors à l'équation

$$(c) \quad (1-f^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + f \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = (1-f^2)^2$$

Si l'on fait  $f = -\cos \varphi$ , la condition (c) devient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi.$$

### III. — Recherches des surfaces $\Sigma$ .

Soient  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  les cosinus directeurs de la normale en un point de  $\Sigma$  et

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = r$$

l'équation du plan tangent en ce point; nous supposons que les courbes de paramètre  $u$  et  $v$  soient les géodésiques conjuguées de la surface. On sait déjà que  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  et  $r$  sont quatre solutions particulières d'une équation de Laplace.

De plus, on a, en désignant par  $x, y, z$  les coordonnées du point de contact,

$$(a) \quad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial v} + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \beta_1}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Les équations (b) expriment que les courbes de paramètre  $u$  et  $v$  sont conjuguées. La direction qui a pour paramètres directeurs  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}, \frac{\partial \beta_1}{\partial v}, \frac{\partial \gamma_1}{\partial v}$  est perpendiculaire à la section normale qui contient la tangente à la courbe  $v = \text{const.}$ , c'est-à-dire au plan osculateur de cette courbe.

On a donc

$$(c) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial v} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial \beta_1}{\partial u} \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0. \end{cases}$$

Des équations (b) et (c) on déduit évidemment

$$(d) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial u \partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial u \partial v} \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial u \partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial u \partial v} \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

La comparaison des équations (a) et (d) donne

$$\frac{\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u \partial v}}{\alpha_1} = \frac{\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial u \partial v}}{\beta_1} = \frac{\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial u \partial v}}{\gamma_1};$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  vérifient une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = R \theta.$$

D'après le paragraphe précédent, cette équation est l'équation (2) du § I;  $r$  est une solution de la même équation;  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  sont les cosinus qui ont été introduits au § I.

Si  $r$  n'est pas linéairement indépendant de  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , la surface  $\Sigma$  correspondante se réduit à un point. Ce sont d'ailleurs les seules solutions de l'équation (2) qui ne donnent pas de surfaces  $\Sigma$ .

Quand  $r$  est connu, on peut avoir facilement les coordonnées ponctuelles de la surface  $\Sigma$ . Joignons, en effet, à l'équation du plan tangent

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = r$$

les deux équations obtenues en dérivant par rapport à  $u$  et  $v$ ; on aura

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z &= \frac{\partial r}{\partial v}, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial r}{\partial u} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial r}{\partial v}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}x &= -\frac{\alpha}{\sin \varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial u} + \cos \varphi \frac{\partial r}{\partial v} \right) + \alpha_1 r + \alpha_2 \frac{\partial r}{\partial v}, \\y &= -\frac{\beta}{\sin \varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial u} + \cos \varphi \frac{\partial r}{\partial v} \right) + \beta_1 r + \beta_2 \frac{\partial r}{\partial v}, \\z &= -\frac{\gamma}{\sin \varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial u} + \cos \varphi \frac{\partial r}{\partial v} \right) + \gamma_1 r + \gamma_2 \frac{\partial r}{\partial v}.\end{aligned}$$

En différentiant maintenant par rapport à  $u$  et  $v$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= h\alpha, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= l\alpha' = l(-\alpha \cos \varphi + \alpha_2 \sin \varphi).\end{aligned}$$

Ces formules mettent en évidence les propriétés déjà données des surfaces  $\Sigma$ . D'abord, les courbes de paramètre  $u$  et  $v$  forment un système conjugué; car

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial h}{\partial v} \alpha + h \frac{\partial \varphi}{\partial v} \alpha_2.$$

$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$  sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées du premier ordre; enfin,  $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \alpha'}{\partial v}$  étant proportionnels à  $\alpha_1$ , les normales principales aux courbes de paramètres  $u$  et  $v$  sont la normale à la surface : ces courbes sont des géodésiques.

#### IV. — Relations entre les surfaces $S$ et $\Sigma$ .

*Le lieu des centres de courbure de  $S_1$  qui correspondent aux courbes de paramètre  $v$  est une surface  $\Sigma$ .*

Ce lieu est l'enveloppe des plans menés par  $M_1$  perpendiculairement à la droite  $M_1 M_2$  de la congruence  $C$ . Les coordonnées tangentiellles de ce plan sont  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  et  $r$ :

$$r = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1;$$

d'où, en tenant compte des formules (A), (C) du § I,

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = \cos \varphi (\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1) = r \cos \varphi.$$

C'est la définition de  $\Sigma$  en coordonnées tangentielles. De même :

*Le lieu des centres de courbure de  $S_2$  qui correspondent aux courbes de paramètre  $u$  est aussi une surface  $\Sigma$ , que nous désignerons par  $\Sigma_1$ .*

Sur la droite  $M_1 M_2$  de la congruence  $C$ , prenons un point  $M$ , tel que l'on ait

$$\frac{MM_1}{M_1 M_2} = -k,$$

$k$  étant une constante ; menons par  $M$  un plan  $\Pi$  perpendiculaire à  $M_1 M_2$ . Les coordonnées de ce plan sont

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, r + 2k\rho;$$

donc il enveloppe une surface  $\Sigma$ . En particulier, la surface moyenne de la congruence est une surface  $\Sigma$ , que nous désignerons par  $\Sigma'$ .

Inversement, *les tangentes aux courbes  $v = \text{const.}$  d'une surface  $\Sigma$  sont normales à une surface  $S_1$  ; les tangentes aux courbes  $u = \text{const.}$  sont normales à une surface  $S_2$ .*

En effet, les cosinus directeurs de la tangente aux courbes  $v = \text{const.}$ , par exemple, sont  $\alpha, \beta, \gamma$ . Les surfaces qui coupent orthogonalement ces droites sont des surfaces  $S_1$ .

Ces relations montrent que, une congruence  $C$  ou une surface  $S$  étant données, on peut en déduire, en général, une infinité d'autres. En effet, les tangentes aux courbes  $v = \text{const.}$  de la surface  $\Sigma$ , sont normales à une surface  $S'_1$  en un point  $M'_1$ , ce qui détermine une nouvelle congruence  $C_1$  ; on pourra opérer sur cette congruence comme sur  $C$ . A la congruence  $C$  correspond une solution  $\rho$  de l'équation (2) ; à la congruence  $C_1$  une nouvelle solution  $\rho_1$  ; quand  $\rho$  est donné,  $\rho_1$  est défini à un terme près de la forme  $k \frac{\partial \rho}{\partial v}$ , car on peut remplacer  $S'_1$  par une surface parallèle. Nous avons une transformation de l'équation (2)

en elle-même, transformation qui s'effectue à l'aide de quadratures et que nous désignerons par  $s$ ; de sorte que

$$\rho_1 = s\rho.$$

On peut faire la transformation en sens inverse; les tangentes aux courbes  $u = \text{const.}$  de  $\Sigma$  sont normales en  $M'_2$  à une surface  $S'_2$ , à laquelle correspond une congruence  $C''$ . Si  $\rho'_1$  est la solution correspondante,  $\rho_1$  est déterminé à un terme près de la forme  $k \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ . Nous désignerons cette transformation par  $t$  :

$$\rho'_1 = t\rho.$$

Ces deux transformations sont évidemment inverses l'une de l'autre; car, si l'on applique la seconde à  $S'_1$ , on retombe sur la surface  $S_2$  ou une surface parallèle, de sorte qu'on doit avoir

$$ts\rho = \rho + k \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

et, de même,

$$st\rho = \rho + k \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

## V. — Expression analytique des transformations $s$ et $t$ .

Le point  $M'_1$  étant dans le plan mené par  $M_2$  perpendiculairement à  $M_1M_2$ , ses coordonnées  $x'_1, y'_1, z'_1$  sont données par les formules

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 + 2\xi\alpha + 2\eta\alpha_2, \\ y'_1 &= y_2 + 2\xi\beta + 2\eta\beta_2, \\ z'_1 &= z_2 + 2\xi\gamma + 2\eta\gamma_2. \end{aligned}$$

En différentiant, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_1}{\partial u} &= 2\alpha \left( \frac{\partial \xi}{\partial u} - \rho \sin \varphi \right) + 2\alpha_1 (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + 2\alpha_2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial u} - \rho \cos \varphi \right), \\ \frac{\partial x'_1}{\partial v} &= 2\alpha \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} - \eta \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + 2\alpha_1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial v} - \eta \right) + 2\alpha_2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial v} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Pour que le point  $M'_1$  décrive une surface  $S_1$ , il faut annuler dans

$\frac{\partial x'_1}{\partial u}$  les coefficients de  $\alpha$  et  $\alpha_2$ , et dans  $\frac{\partial x'_1}{\partial v}$  ceux de  $\alpha$  et  $\alpha_1$ ; on a alors

$$\eta = \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

$\xi$  est donné par les deux équations compatibles

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial u} = \rho \sin \varphi, \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{cases}$$

Le coefficient de  $-2\alpha_2$  dans  $\frac{\partial x'_1}{\partial u}$  doit être  $\rho_1$ ; celui de  $-2\alpha_1$  dans  $\frac{\partial x'_1}{\partial v}$  doit être  $\frac{\partial \rho_1}{\partial u}$ , de sorte que l'on a

$$(4) \quad \begin{cases} \rho_1 = -\xi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = -\xi \sin \varphi - \frac{\partial \rho}{\partial v} \cos \varphi. \end{cases}$$

La transformation  $s$  est définie par les formules (3) et (4). De même, la transformation  $t$  serait définie par les formules

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \rho \sin \varphi; \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} \rho'_1 = -\xi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial \rho'_1}{\partial v} = -\xi_1 \sin \varphi - \frac{\partial \rho}{\partial u} \cos \varphi. \end{cases}$$

Ces formules analytiques mettent bien en évidence ce fait que les transformations  $s$  et  $t$  donnent les solutions nouvelles respectivement à des termes près de la forme  $k \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ ,  $k \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ . J'ai démontré ailleurs <sup>(1)</sup>,

---

(1) Sur une classe particulière d'équations aux dérivées partielles à invariants égaux (*Annales de l'École Normale*, janvier 1890).

par une voie purement analytique, que les transformations  $s$  et  $t$  sont inverses l'une de l'autre.

Nous allons chercher quel doit être  $\rho$  pour que  $\rho_1$  soit nul. Des deux équations

$$\begin{aligned} 0 &= \xi \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}, \\ 0 &= \xi \sin \varphi + \frac{\partial \rho}{\partial v} \cos \varphi \end{aligned}$$

on déduit

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} \sin \varphi - \frac{\partial \rho}{\partial v} \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

On trouve, en intégrant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial v} &= A \sin \varphi = A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \\ \rho &= A \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B, \end{aligned}$$

A et B étant des fonctions de  $u$ . Cette valeur de  $\rho$  donne

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = A' \sin \varphi + A \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

On doit donc avoir

$$A' \sin \varphi = B \cos \varphi$$

et, par suite,

$$A' = 0, \quad B = 0,$$

A est constant. On vérifie directement que, dans ce cas,  $\rho_1$  peut être nul. La surface  $S_2$  est une sphère. De même  $\rho'_1$  ne peut être nul que si  $\rho = k \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ ; la surface  $S_1$  est alors une sphère.

## VI. — Propriétés diverses.

Nous allons donner d'abord la relation existant entre la solution  $r$  de la surface  $\Sigma$  à la solution  $\rho$  qui donne la surface correspondante  $S_1$ . Nous savons que l'on a déjà

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 = r.$$



En différentiant, par rapport à  $v$ , on trouve

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 = \frac{\partial r}{\partial v}.$$

Posons alors

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu,$$

d'où

$$x_1 = \alpha\mu + \alpha_1 r + \alpha_2 \frac{\partial r}{\partial v},$$

$$y_1 = \beta\mu + \beta_1 r + \beta_2 \frac{\partial r}{\partial v},$$

$$z_1 = \gamma\mu + \gamma_1 r + \gamma_2 \frac{\partial r}{\partial v}.$$

Différentions. On a

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \alpha \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} - r \sin \varphi \right) + \alpha_1 \left( \frac{\partial r}{\partial u} + \mu \sin \varphi + \frac{\partial r}{\partial v} \cos \varphi \right),$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \alpha \left( \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial v} + r \right).$$

Si l'on identifie avec les formules du § I, on aura

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = r \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$-2\rho = \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial v} + r,$$

$$-2 \frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial u} + \mu \sin \varphi + \frac{\partial r}{\partial v} \cos \varphi;$$

$\rho$  et  $r$  sont donc liés par la relation

$$2\rho = sr - r.$$

La comparaison de  $\Sigma$  et  $S'_2$  donnerait aussi

$$2\rho'_1 = -tr + r,$$

qui peut se déduire de la précédente en y appliquant la transformation  $t$ .

Il est facile de déduire de là tous les cas où la transformation  $s$  ou  $t$

reproduisent la même fonction. Si l'on désigne par  $r$  cette fonction, on voit que  $\rho$  est nul ;  $x, y, z$  sont des constantes ;  $r$  est de la forme

$$r = ax_1 + b\beta_1 + c\gamma_1,$$

et, réciproquement, dans ce cas, on a, en choisissant convenablement la constante qui entre dans la quadrature,

$$sr = tr = r.$$

Si l'on prend

$$\rho = ax_1 + b\beta_1 + c\gamma_1,$$

la congruence  $C$  est telle que sa surface centrale (le lieu des milieux de  $M_1 M_2$ ) est un plan. C'est d'ailleurs le seul cas où la congruence  $C$  jouit de cette propriété. Toutes les congruences qui se déduisent de  $C$ , par notre méthode, seront identiques à  $C$ , si l'on choisit convenablement les constantes d'intégration qui les déterminent.

Nous avons déjà montré (§ IV) que le plan  $\Pi$ , mené perpendiculairement à  $M_1 M_2$  en un point  $M$  tel que l'on ait

$$\frac{M_1 M}{M_1 M_2} = k,$$

$k$  étant constant, enveloppe une surface  $\Sigma$  correspondant à la solution  $r + 2k\rho$ . A cette surface  $\Sigma$  on peut faire correspondre une surface  $S_1$ . Si  $\rho'$  est la solution qui donne  $S_1$ , on aura

$$\begin{aligned} 2\rho' &= s(r + 2k\rho) - r - 2k\rho \\ &= 2\rho + 2ksp - 2k\rho. \end{aligned}$$

Nous trouverons plus tard une infinité de solutions  $\rho$  vérifiant la relation

$$sp = m\rho.$$

Si l'on prend une telle solution et si l'on fait

$$\frac{k-1}{k} = m,$$

$\rho'$  sera nul, le plan  $\Pi$  passera par un point fixe.

## VII. — Les surfaces à courbure totale constante.

J'ai déjà établi <sup>(1)</sup> que, si une surface à courbure constante est rapportée à ses lignes asymptotiques, les cosinus directeurs de la normale à la surface sont solutions d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = R \theta.$$

Il en résulte alors, d'après le § II, que ces cosinus directeurs sont les quantités  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , qui ont été définies au § I. En désignant par  $x, y, z$  les coordonnées d'un point de la surface, on aura facilement, si la courbure de cette surface est  $-1$ ,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\alpha' = \alpha \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha.$$

Les lignes de courbure ont pour équation

$$u + v = \text{const.} \quad \text{et} \quad u - v = \text{const.}$$

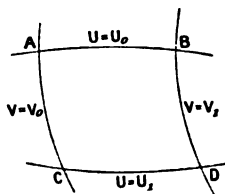
Enfin les rayons de courbure principaux sont donnés par l'équation

$$r^2 \sin \varphi - 2r \cos \varphi - \sin \varphi = 0.$$

On a, pour le  $ds^2$  de la surface,

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2 du dv \cos \varphi;$$

$\varphi$  est l'angle des deux lignes asymptotiques. Si ABCD est un quadrila-



ère formé de lignes asymptotiques, les côtés AB et CD correspondant

<sup>(1)</sup> Voir le Mémoire déjà cité dans les *Annales de l'École Normale*.

aux valeurs  $u_0$  et  $u_1$  de  $u$ , les côtés AC et BD aux valeurs  $v_0$  et  $v_1$  de  $v$ , on aura

$$AB = CD = v_1 - v_0,$$

$$AC = BD = u_1 - u_0.$$

Les côtés opposés dans ce quadrilatère sont égaux.

Enfin l'aire du quadrilatère ABCD a pour expression

$$\iint \sin \varphi \, du \, dv = \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \, du \, dv = A + B + C + D - 2\pi.$$

### VIII. — Transformation de M. Bäcklund.

Soient  $\xi$  et  $\eta$  deux solutions quelconques du système

$$(1) \quad \begin{cases} h \frac{\partial \xi}{\partial u} = \sin h \eta, \\ l \frac{\partial \eta}{\partial v} = \sin l \xi, \end{cases}$$

$h$  et  $l$  étant des constantes. On déduit de (1)

$$l \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \cos h \eta \sin l \xi,$$

$$h \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} = \cos l \xi \sin h \eta.$$

Si donc on pose

$$(2) \quad \varphi = h \eta - l \xi, \quad \psi = h \eta + l \xi,$$

on aura

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \sin \psi.$$

A la solution  $\varphi$  on peut faire correspondre une surface  $f$  de courbure  $-1$ ; de même, à la solution  $\psi$  on peut faire correspondre une surface  $F$  ayant aussi une courbure  $-1$ . Je vais montrer, de plus, que si  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $f$  sont donnés, on peut déterminer  $F$ . Désignons par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ x_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

les cosinus directeurs du trièdre relatif à la surface  $f$ ; par

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

les quantités analogues pour la surface  $F$ .

Définissons un angle constant  $\theta$  par la formule

$$\operatorname{colog} \frac{\theta}{2} = \frac{h}{l},$$

de sorte que l'on a aussi

$$(3) \quad h(1 - \cos \theta) = l \sin \theta \quad \text{et} \quad h \sin \theta = l(1 + \cos \theta).$$

Je dis que l'on peut poser

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1 \cos \theta - \alpha \sin l \xi \sin \theta + \alpha_2 \cos l \xi \sin \theta, \\ b_1 = \beta_1 \cos \theta - \beta \sin l \xi \sin \theta + \beta_2 \cos l \xi \sin \theta, \\ c_1 = \gamma_1 \cos \theta - \gamma \sin l \xi \sin \theta + \gamma_2 \cos l \xi \sin \theta. \end{cases}$$

D'abord ces trois quantités sont les cosinus directeurs d'une droite; il suffit donc de vérifier qu'ils satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \lambda \cos \psi.$$

La vérification, un peu longue il est vrai, ne présente pas de difficultés : on différencie les formules (4) en tenant compte des équations (A) du § I et des équations (1), (2), (3) de ce paragraphe;  $a_1, b_1, c_1$  étant connus, on en déduit facilement les six autres cosinus. Nous donnerons seulement les valeurs de  $a$  et  $a_2$ , les autres s'en déduisant immédiatement; on trouve

$$\begin{aligned} a &= \alpha (\cos^2 l \xi - \cos \theta \sin^2 l \xi) \\ &\quad - \alpha_1 \sin \theta \sin l \xi + \alpha_2 (\cos l \xi \sin l \xi + \cos \theta \cos l \xi \sin l \xi), \\ a_2 &= -\alpha (\cos \theta \cos l \xi \sin l \xi + \cos l \xi \sin l \xi) \\ &\quad - \alpha_1 \sin \theta \cos l \xi + \alpha_2 (\cos \theta \cos^2 l \xi - \sin^2 l \xi). \end{aligned}$$

Ces neuf cosinus vérifient les formules (A) du § I, dans lesquelles  $\varphi$  serait remplacé par  $\psi$ .

Maintenant, nous pourrions déterminer par des quadratures une fonction  $\rho$  satisfaisant aux deux équations

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial u} = -\rho \frac{l}{h} \cosh \eta, \\ \frac{\partial \rho}{\partial v} = -\rho \frac{h}{l} \cos l\xi. \end{cases}$$

Ces deux équations sont compatibles en vertu de (1). En différenciant la première, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} &= -\frac{l}{h} \frac{\partial \rho}{\partial v} \cosh \eta + \rho \sin h\eta l \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ &= \rho (\cosh \eta \cos l\xi + \sin h\eta \sin l\xi) = \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

On voit de même que l'on a

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\rho} \cos \psi.$$

La solution  $\rho$  est donc celle qui, dans la méthode de M. Moutard, transforme l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \lambda \cos \varphi$$

dans l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \lambda \cos \psi.$$

Les solutions  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  de la première se transforment en  $a_1, b_1, c_1$ . Il résulte de cette remarque et d'un théorème que nous avons établi ailleurs (1), que les surfaces  $f$  et  $F$  peuvent être placées de telle sorte qu'elles soient les focales d'une congruence à lignes asymptotiques correspondantes. Voici comment on peut vérifier ce fait :  $x, y, z$  étant les coordonnées d'un point  $m$  de  $f$ , déterminons un point  $M$  de coor-

---

(1) Sur les congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales (*Comptes rendus*, janvier 1890).

données  $X, Y, Z$  par les formules

$$X = x + \alpha \cos l \xi \sin \theta + \alpha_1 \sin l \xi \sin \theta,$$

$$Y = y + \beta \cos l \xi \sin \theta + \beta_1 \sin l \xi \sin \theta,$$

$$Z = z + \gamma \cos l \xi \sin \theta + \gamma_1 \sin l \xi \sin \theta.$$

On trouvera, en différentiant,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a \cos \psi - \alpha_1 \sin \psi,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = a,$$

ce qui prouve que le point  $M$  décrit une surface égale à  $F$ . Comme, d'ailleurs, on a

$$\alpha_1(X - x) + \beta_1(Y - y) + \gamma_1(Z - z) = 0,$$

$$a_1(X - x) + b_1(Y - y) + c_1(Z - z) = 0,$$

la droite  $Mm$  est tangente aux surfaces  $f$  et  $F$ . Les lignes asymptotiques se correspondent évidemment sur ces deux surfaces, puisque ce sont les courbes de paramètres  $u$  et  $v$ . Il en est de même des lignes de courbure. Dans cette congruence, l'angle des deux plans focaux est égal à  $0$ ; la distance des foyers à  $\sin \theta$ . Si l'on suppose  $h = l$ ,  $\theta = 90^\circ$ , la distance focale est égale à  $1$ ; on obtient la congruence qui intervient dans la transformation de MM. Ribaucour et Bianchi.

#### IX. — Étude des équations (1) du § VIII.

La solution  $\xi, \eta$  des équations (1) du § VIII peuvent, d'une infinité de manières, être choisies de telle sorte que  $\varphi$  soit une solution quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi.$$

Si, en effet, on suppose  $\varphi$  donné et si, dans les équations (1), on remplace  $\eta$  par

$$\frac{l}{h} \xi + \frac{\varphi}{h},$$

on a, pour déterminer  $\xi$ , deux équations, qui sont compatibles chaque fois que  $\varphi$  vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi.$$

En d'autres termes, il existe une infinité de congruences telles que celles que nous avons considérées au paragraphe précédent, et dont l'une des surfaces focales est une surface quelconque à courbure constante. L'une de ces congruences étant connue, toutes les autres peuvent être déterminées à l'aide de quadratures. La congruence donnée, ayant pour surfaces focales  $f$  et  $F$ , qui correspondent aux solutions  $\xi$ ,  $\eta$  des équations (1); soient  $f_1$  et  $F_1$  les focales d'une congruence inconnue qui correspond aux solutions  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  des équations (1).  $\varphi$  étant la même pour les deux congruences, on doit avoir

$$h\eta_1 - l\xi_1 = h\eta - l\xi.$$

Nous poserons alors

$$\eta_1 = \eta + l\lambda,$$

$$\xi_1 = \xi + h\lambda,$$

$\lambda$  étant une fonction inconnue qui doit vérifier les deux équations

$$h \frac{\partial}{\partial u} (\xi + h\lambda) = \sin(h\eta + hl\lambda),$$

$$l \frac{\partial}{\partial v} (\eta + l\lambda) = \sin(l\xi + hl\lambda),$$

ou, en tenant compte des équations (1),

$$h^2 \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \sin(h\eta + hl\lambda) - \sin h\eta,$$

$$l^2 \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \sin(l\xi + hl\lambda) - \sin l\xi,$$

ou bien

$$h^2 \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\sin h\eta (1 - \cosh l\lambda) + \cosh \eta \sin hl\lambda,$$

$$l^2 \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\sin l\xi (1 - \cosh l\lambda) + \cosh \xi \sin hl\lambda.$$



Posons maintenant

$$r = \cot \frac{hl\lambda}{2},$$

on aura alors

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial u} = -\frac{l}{h} \cos h\eta r + \frac{l}{h} \sin h\eta, \\ \frac{\partial r}{\partial v} = -\frac{h}{l} \cos l\xi r + \frac{h}{l} \sin l\xi. \end{cases}$$

Pour intégrer le système (6), nous nous servirons de la solution  $\rho$ , définie par les équations (5) du paragraphe précédent, et nous poserons

$$r = \theta \rho.$$

On trouvera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{1}{\rho} \frac{l}{h} \sin h\eta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{1}{\rho} \frac{h}{l} \sin l\xi. \end{aligned}$$

Ces deux équations sont compatibles, car elles donnent toutes deux

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\rho} \sin \psi.$$

Si  $r_1$  est une solution particulière des équations (6), la solution générale sera

$$r = r_1 + a\rho.$$

On vérifie facilement que l'on a aussi

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = r \cos \varphi;$$

on obtient ainsi une infinité de couples de surfaces  $f, F, f, F_1, \dots, f, F_n, \dots$ . Désignons par  $\xi_n, \eta_n$  les solutions du système (1) qui correspondent au couple  $f, F_n$ ; par  $\rho_n$  la solution du système (5) dans lequel on a remplacé  $\xi, \eta$  par  $\xi_n, \eta_n$ . Nous pourrions, en outre, poser

$$\begin{aligned} \xi_n &= \xi + h\lambda_n, \\ \eta_n &= \eta + l\lambda_n, \\ r_n &= \cot \frac{hl\lambda_n}{2}. \end{aligned}$$

$r_n$  est une solution du système (6); on peut donc écrire

$$r_n = r_1 + a\rho,$$

$a$  étant une constante. Nous aurions pu partir du couple  $f, F_1$ ; fermer les équations (6'), obtenues en remplaçant  $\xi, \eta$  dans (6) par  $\xi_1, \eta_1, \dots$ . Le système (6') admet la solution particulière  $-r_1$  qui forme le passage de  $F_1$  à  $F$ . Son intégrale générale sera

$$-r_1 + b\rho_1.$$

Ce système admet, en outre, la solution  $\cot \frac{hb(\lambda_n - \lambda_1)}{2}$ , qui fournit le passage de  $F_1$  à  $F_n$ . Des trois relations

$$\cot \frac{hl\lambda_1}{2} = r_1, \quad \cot \frac{hl\lambda_n}{2} = r_1 + a\rho, \quad \cot \frac{hl(\lambda_n - \lambda_1)}{2} = -r_1 + b\rho_1,$$

on déduit

$$ab\rho\rho_1 = -1 - r_1^2.$$

On peut supposer  $ab = +1$ ; cela revient à changer les facteurs arbitraires qui entrent dans  $\rho$  et  $\rho_1$ , et à écrire

$$\rho\rho_1 = -1 - r_1^2.$$

De même, en choisissant convenablement le facteur arbitraire qui entre dans  $\rho_n$ , on pourra écrire

$$\rho\rho_n = -1 - r_n^2 = -1 - r_1^2 - 2ar_1\rho - a^2\rho^2 = \rho\rho_1 - 2ar_1\rho - a^2\rho^2,$$

d'où

$$\rho_n = \rho_1 - 2ar_1 - a^2\rho.$$

Cette formule nous apprendrait, si nous ne le savions déjà, que  $r_1$  est solution de l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \lambda \cos \varphi.$$

Toutes les solutions analogues,  $r, \rho$ , s'expriment linéairement à l'aide de trois d'entre elles :  $\rho, \rho_1, r$ , entre lesquelles existe la relation

$$r_1^2 + \rho\rho_1 = -1.$$

On pourra déduire de là trois solutions  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  de (7), vérifiant la relation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Ce système  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  est linéairement distinct de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ; car on a

$$dx_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2 = du^2 - 2 \cos \varphi du dv + dv^2$$

et

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = -\frac{h^2}{l^2} du^2 - 2 \cos \varphi du dv - \frac{l^2}{h^2} dv^2.$$

On voit que si, dans les formules qui donnent  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , on remplace  $u$  par  $\frac{il}{h}u$  et  $v$  par  $\frac{h}{il}v$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  seront encore solution de l'équation (7), dans laquelle, cependant,  $\varphi$  aura changé de valeur. A cette nouvelle fonction  $\varphi$  correspond une nouvelle surface à courbure constante;  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  remplaceront, pour la détermination de cette nouvelle surface, les quantités  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Nous retombons ainsi sur la transformation de M. Lie.

L'équation (7) possède la propriété d'admettre un nombre illimité de systèmes de trois solutions liées par la relation

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \text{const.},$$

F étant homogène et du second degré. Pour abréger, nous donnerons le nom de *solutions quadratiques* à ces solutions particulières.

Quand on transforme, suivant la méthode de M. Moutard, l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \lambda \cos \varphi$$

dans l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \lambda \cos \psi.$$

les solutions quadratiques de la première équation deviennent des solutions quadratiques de la seconde. Il suffit, pour la voir, de faire le changement indiqué sur les variables  $u$  et  $v$ , et de remarquer que les cosinus qui correspondent à la première surface deviennent, par la transformation, les cosinus de la seconde.

On pourra de même déduire du couple  $f, F_n$  une infinité de couples analogues dont fait partie la surface  $F_n$ . L'opération n'exigera que des quadratures. Les surfaces  $F_n$  renferment une constante arbitraire; l'opération qui vient d'être indiquée introduira une nouvelle constante arbitraire. On voit qu'on pourra former des surfaces à courbure constante, renfermant autant de constantes arbitraires que l'on voudra, par une suite de quadratures <sup>(1)</sup>.

**X. — Recherche des congruences ayant pour surfaces focales des surfaces à courbure constante et telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces.**

Soient  $f$  et  $F$  les deux nappes focales; on peut toujours supposer que la courbure de  $F$  est  $-1$ ; celle de  $f$  sera désignée par  $-m^2$ . Les cosinus directeurs de la normale à  $f$  étant les quantités  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  déjà introduites; ceux de  $F$  étant désignés par  $a_1, b_1, c_1$ , on pourra évidemment poser

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1 \cos \vartheta - \alpha \sin x \sin \vartheta + \alpha_2 \cos x \sin \vartheta, \\ b_1 = \beta_1 \cos \vartheta - \beta \sin x \sin \vartheta + \beta_2 \cos x \sin \vartheta, \\ c_1 = \gamma_1 \cos \vartheta - \gamma \sin x \sin \vartheta + \gamma_2 \cos x \sin \vartheta, \end{cases}$$

$\vartheta$  et  $x$  étant des fonctions inconnues de  $u$  et  $v$ .

Nous nous appuierons maintenant sur les résultats que j'ai donnés dans une Note insérée dans les *Comptes rendus* <sup>(2)</sup>. Les quantités  $\xi, \eta, \zeta$  qui figurent dans ce Mémoire doivent être remplacées par  $\sqrt{m}\alpha_1, \sqrt{m}\beta_1, \sqrt{m}\gamma_1$ , et les quantités  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  par  $a_1, b_1, c_1$ . On devra donc avoir

$$(2) \quad \rho \frac{\partial a_1}{\partial u} + a_1 \frac{\partial \rho}{\partial u} = m \left( -\rho \frac{\partial x_1}{\partial u} + \alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial u} \right),$$

$$(3) \quad \rho \frac{\partial a_1}{\partial v} + a_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} = m \left( \rho \frac{\partial x_1}{\partial v} - \alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} \right),$$

<sup>(1)</sup> Sur cette suite de quadratures, consulter une Note de M. Darboux (*Annales de l'École Normale*; 1890).

<sup>(2)</sup> Les congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales (janvier 1890).

et les équations analogues obtenues en remplaçant  $\alpha$ , et  $a$ , par  $\beta$ , et  $b$ , ou par  $\gamma$ , et  $c$ ,  $\rho$  étant une solution

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \rho \cos \varphi.$$

Différentions les formules (1), en tenant compte des formules A du § I; on trouve

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_1}{\partial u} = \alpha \left( -\cos \theta \sin \varphi - \cos x \sin \theta \frac{\partial x}{\partial u} - \sin x \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) \\ \quad + \alpha_1 \left[ -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} + \sin \theta \cos (x + \varphi) \right] \\ \quad + \alpha_2 \left( -\cos \theta \cos \varphi - \sin x \sin \theta \frac{\partial x}{\partial u} + \cos x \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial a_1}{\partial v} = \alpha \left( -\cos x \sin \theta \frac{\partial (x + \varphi)}{\partial v} - \sin x \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) \\ \quad + \alpha_1 \left( -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} - \cos x \sin \theta \right) \\ \quad + \alpha_2 \left( \cos \theta - \sin x \sin \theta \frac{\partial (x + \varphi)}{\partial v} + \cos x \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} \right). \end{array} \right.$$

Multiplions les trois équations (2), d'abord par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et ajoutons; puis par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , et ajoutons; on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial u} &= m \left[ \rho \sin \theta \cos (x + \varphi) + \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial u} \right], \\ \rho \left[ -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} + \sin \theta \cos (x + \varphi) \right] + \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial u} &= m \frac{\partial \rho}{\partial u}. \end{aligned}$$

En éliminant entre ces équations  $\frac{\partial \rho}{\partial u}$  et  $\rho \sin \theta$ , on a

$$\begin{aligned} (1 - m \cos \theta) \left[ \cos (x + \varphi) - \frac{\partial \theta}{\partial u} \right] &= m \cos (x + \varphi) (m - \cos \theta), \\ (1 - m \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial u} &= (1 - m^2) \cos (x + \varphi). \end{aligned}$$

Opérons de même sur les trois équations (3); on aura

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial v} &= m \left( \rho \cos x \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial v} \right), \\ \rho \left( -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} - \sin \theta \cos x \right) + \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial v} &= -m \frac{\partial \rho}{\partial v}, \\ (1 + m \cos \theta) \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} + \cos x \right) &= (m + \cos \theta) m \cos x, \\ (1 + m \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -(1 - m^2) \cos x.\end{aligned}$$

Nous avons donc les deux groupes suivants d'équations :

$$(6) \quad \begin{cases} (1 - m \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial u} = (1 - m^2) \cos(x + \varphi), \\ (1 + m \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial v} = -(1 - m^2) \cos x \end{cases}$$

et

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{m \sin \theta}{1 - m \cos \theta} \cos(x + \varphi), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{m \sin \theta}{1 + m \cos \theta} \cos x. \end{cases}$$

Si  $1 - m^2 = 0$ ,  $\theta$  est constant; en continuant les calculs, on retrouvera les congruences que nous avons introduites dans la méthode de M. Bäcklund.

Si  $1 - m^2 \neq 0$ , la comparaison des systèmes (6) et (7) donnera

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} &= \frac{m}{1 - m^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial u}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} &= -\frac{m}{1 - m^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial v};\end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \right) &= 0, \\ \rho &= f(u) f_1(v);\end{aligned}$$

mais l'équation (4) n'a pas de solutions de cette forme; l'hypothèse  $1 - m^2 \neq 0$  est impossible.

Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

*Si une congruence admet pour surfaces focales des surfaces à courbure totale constante, si, de plus, les lignes asymptotiques se correspondent, on a les propriétés :*

- 1° *La courbure des deux surfaces est la même ;*
- 2° *L'angle des plans focaux a une valeur constante  $\theta$  ;*
- 3° *La distance des foyers est égale à  $m \sin \theta$ , la courbure commune des deux surfaces étant  $-m^2$ .*

#### XI. — Sur quelques surfaces $S$ particulières.

Remarquons d'abord que les coordonnées  $x, y, z$  du point central  $N$  de la congruence  $C$  satisfont aux équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= -\alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho \frac{\partial \alpha_1}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} - \rho \frac{\partial \alpha_1}{\partial v},\end{aligned}$$

avec les formules analogues pour  $y$  et  $z$ . Si maintenant on prend pour  $\rho$  la solution particulière qui a été introduite au § VIII, on voit que l'on aura

$$x = \rho \alpha_1, \quad y = \rho b_1, \quad z = \rho c_1.$$

Les coordonnées des points  $M_1, M_2$  des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  seront

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho(a_1 - \alpha_1), & y_1 &= \rho(b_1 - \beta_1), & z_1 &= \rho(c_1 - \gamma_1); \\ x_2 &= \rho(a_1 + \alpha_1), & y_2 &= \rho(b_1 + \beta_1), & z_2 &= \rho(c_1 + \gamma_1);\end{aligned}$$

O étant l'origine, on voit que l'on aura

$$\begin{aligned}\overline{OM_1}^2 &= \rho^2(2 - 2 \cos \theta), & OM_1 &= 2\rho \sin \frac{\theta}{2}, \\ \overline{OM_2}^2 &= \rho^2(2 + 2 \cos \theta), & OM_2 &= 2\rho \cos \frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

Le triangle  $OM_1M_2$  reste semblable à lui-même; ses côtés sont entre

eux comme les nombres  $\sin \frac{\vartheta}{2}$ ,  $\cos \frac{\vartheta}{2}$ , 1. Ce triangle est rectangle en O.

L'angle en  $M_1$  est égal à  $\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}$ ; l'angle en  $M_2$ , à  $\frac{\vartheta}{2}$ . On voit que, sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , les lignes de courbure d'un système sont coupées sous un angle constant par les rayons vecteurs issus d'un point fixe.

La projection M de O sur  $M_1 M_2$  partage cette droite dans un rapport constant; le plan mené par M, perpendiculairement à  $M_1 M_2$ , passe par le point fixe O. On en conclut (§ VI) que la transformation  $s$  multiplie  $\rho$  par un facteur constant. Voici comment on peut vérifier ce fait : rappelons que l'on a

$$s\rho = -\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2},$$

$\vartheta$  étant défini par les quadratures

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = \rho \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

En tenant compte des formules du § VIII, on pourra prendre

$$\vartheta = \frac{h}{l} \sin l \tilde{z} \rho;$$

on trouvera alors

$$s\rho = -\frac{h^2}{l^2} \rho.$$

Toutes les fonctions qui jouissent de cette propriété s'expriment linéairement à l'aide des quantités  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $r_1$  du § IX. Il suffit, pour le voir, de faire le changement de variables indiqué dans ce paragraphe; le multiplicateur  $-\frac{h^2}{l^2}$  devient l'unité. Or les fonctions  $\rho$  dont le multiplicateur est 1 s'expriment linéairement à l'aide de trois d'entre elles (§ VI).

Formons maintenant les surfaces  $S'_1$ ,  $S'_2$ , qui correspondent à la fonction  $\psi$  et à la solution  $\frac{1}{\rho}$ . En désignant par  $x'_1$ ,  $y'_1$ ,  $z'_1$ ;  $x'_2$ ,  $y'_2$ ,  $z'_2$  les



coordonnées des points  $M'_1, M'_2$  de ces surfaces qui correspondent à  $M_1$  et  $M_2$ , on aura

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{\rho} (x_1 - a_1), & y'_1 &= \frac{1}{\rho} (\beta_1 - b_1), & z'_1 &= \frac{1}{\rho} (\gamma_1 - c_1), \\ x'_2 &= \frac{1}{\rho} (x_1 + a_1), & y'_2 &= \frac{1}{\rho} (\beta_1 + b_1), & z'_1 &= \frac{1}{\rho} (\gamma_1 + c_1). \end{aligned}$$

Les longueurs des rayons vecteurs seront

$$OM'_1 = \frac{2}{\rho} \sin \frac{\theta}{2}, \quad OM'_2 = \frac{2}{\rho} \cos \frac{\theta}{2}.$$

On voit que  $S'_1$  est la transformée par inversion de  $S_1$ , la puissance d'inversion étant  $-\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ ; de même,  $S'_2$  est la transformée de  $S_2$  par la puissance  $\frac{1}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2}$ .

Les coordonnées d'un point  $M$  de la surface centrale de la congruence  $C$  étant

$$\rho a_1, \quad \rho b_1, \quad \rho c_1,$$

sa polaire réciproque, par rapport à une sphère de rayon 1 ayant son centre à l'origine, sera enveloppée par un plan dont les coordonnées sont

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad \frac{1}{\rho}.$$

Cette enveloppe est une surface  $\Sigma$  correspondant aux fonctions  $\psi$  et  $\frac{1}{\rho}$ .

## XII. — Sur d'autres surfaces $S$ particulières.

Les surfaces que nous avons obtenues au § XI proviennent, au point de vue analytique, d'une solution la plus générale de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi$$

et d'une solution particulière de l'équation

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \rho \cos \varphi.$$

Mais on peut se placer à un autre point de vue pour obtenir des surfaces  $S$  et  $\Sigma$  particulières. On prendra, pour obtenir de telles surfaces, des solutions particulières des équations (1) et (2). Nous avons déjà vu que, si la solution  $\varphi$  de l'équation est une fonction de  $mu + nv$ ,  $m$  et  $n$  étant constants; si, de plus, on prend pour solution de l'équation (2)

$$\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

le système des surfaces  $S_1, S_2$  est composé de deux sphères. La méthode de transformation des surfaces  $S$  et  $\Sigma$  est arrêtée dès le début. On peut alors chercher d'autres systèmes de surfaces, tels que cette transformation soit arrêtée après la première, la deuxième, ..., la  $n^{\text{ième}}$  opération. J'espère pouvoir donner bientôt des développements sur cette question.



---

SUR LES FONCTIONS CONTINUES  
D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES

ET SUR LE

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES,

PAR M. RQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN

---

I. La démonstration donnée par Cauchy du principe fondamental de la théorie des équations algébriques repose sur un postulatum implicitement admis par l'illustre géomètre et démontré, il y a quelques années, par M. Darboux, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* <sup>(1)</sup>. M. Darboux a prouvé, en effet, que *si une fonction continue de deux variables réelles prend, pour tous les points situés à l'intérieur d'un contour fermé, des valeurs qui demeurent comprises entre deux nombres,  $W$  et  $K$ , elle obtient nécessairement, pour un système au moins de valeurs des deux variables indépendantes, la valeur qui marque la limite maximum ou minimum de toutes les valeurs qu'elle peut prendre.*

D'autre part, la démonstration de Cauchy repose sur des considérations empruntées à la théorie des fonctions circulaires.

Nous nous sommes proposé dans ce travail un double but : 1<sup>o</sup> établir quelques propriétés générales des fonctions continues d'un nombre quelconque de variables, et en particulier étendre à ces dernières le théorème de M. Darboux ; 2<sup>o</sup> réduire à leur plus grande simplicité les raisonnements qui permettent d'éviter toute considération étrangère à l'Algèbre dans la démonstration du principe relatif aux équations entières.

---

<sup>(1)</sup> Année 1872, p. 307 et suivantes.

**De l'espace à  $n$  dimensions. Espaces limités, complets.**

2. Nous nommerons *point à  $n$  coordonnées* tout système de valeurs particulières respectivement attribuées aux  $n$  variables réelles  $x, y, \dots$ , et *espace à  $n$  dimensions* l'ensemble de tous les points à  $n$  coordonnées.

La *distance* des deux points

$$(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots)$$

sera, par définition, la racine carrée non négative de la quantité

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \dots$$

Dans l'espace à  $n$  dimensions, on a souvent à considérer, à l'exclusion de tous les autres points, ceux dont les coordonnées satisfont à certaines conditions, d'une nature absolument quelconque d'ailleurs : leur ensemble constitue ce qu'on appelle une *portion de l'espace à  $n$  dimensions*.

Une portion d'espace est dite *limitée*, lorsque la distance d'un point variable au point  $(0, 0, \dots)$  ne cesse d'y être numériquement inférieure à quelque quantité positive fixe; elle est dite *illimitée* dans le cas contraire.

Un point est dit *complètement extérieur* à une portion donnée de l'espace à  $n$  dimensions, lorsque sa distance à un point variable de la portion dont il s'agit ne cesse d'être supérieure à quelque quantité positive fixe.

Enfin, une portion donnée de l'espace à  $n$  dimensions est dite *complète*, lorsque chacun des points qui n'en font pas partie lui est complètement extérieur.

Par exemple, en désignant par  $R$  une constante positive, et par  $x_0, y_0, \dots$  des constantes quelconques, positives, négatives ou nulles, le fragment d'espace défini par la relation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \dots \leq R^2$$

est à la fois limité et complet. Si l'on supprime le signe d'égalité qui figure entre les deux membres, pour ne laisser subsister que le signe d'inégalité, on obtient un fragment limité, mais incomplet.

## Variantes complexes.

3. Dans un Mémoire sur les quantités incommensurables (*Annales de l'École Normale*, novembre 1887), M. Méray appelle *variante* un nombre variable  $v_{m,n,\dots}$  dont la valeur dépend de certains entiers positifs  $m, n, \dots$ , qui prennent toutes les combinaisons de valeurs possibles, et que l'on nomme ses *indices*.

En se bornant au cas le plus simple, où le nombre des indices se réduit à 1, une variante  $v_m$  est dite *convergente*, si, un nombre positif  $\alpha$  de petitesse arbitraire étant donné, on peut assigner pour l'entier  $m$  une valeur à partir de laquelle la différence  $v_{m+p} - v_m$  ne cesse d'être numériquement inférieure à  $\alpha$ , quelque valeur positive que l'on attribue à l'entier  $p$ .

On dit que la variante  $v_m$  a pour *limite* la quantité invariable  $V$ , si la différence  $V - v_m$  est infiniment petite pour  $m$  infini.

*Pour qu'une variante tende vers quelque limite, il faut et il suffit qu'elle soit convergente.*

4. Nous nommerons *variante complexe* un point (variable) de l'espace à  $n$  dimensions ayant pour coordonnées  $n$  variantes, dépendant toutes d'un même indice.

Une variante complexe est dite *convergente*, lorsque toutes ses coordonnées le sont à la fois.

On dit que la variante complexe  $(v)_m$  a pour *limite* le point fixe  $(V)$ , quand ses diverses coordonnées ont respectivement pour limites les coordonnées correspondantes du point fixe.

*Pour qu'une variante complexe  $(v)_m$  soit convergente, il faut et il suffit que, un nombre positif  $\alpha$  de petitesse arbitraire étant donné, on puisse assigner pour l'entier  $m$  une valeur à partir de laquelle la distance des deux points  $(v)_m, (v)_{m+p}$  ne cesse d'être inférieure à  $\alpha$ , quelque valeur positive que l'on attribue à l'entier  $p$ .*

*Pour que la variante complexe  $(v)_m$  tende vers la limite  $(V)$ , il faut et il suffit que la distance de ces deux points soit infiniment petite pour  $m$  infini.*

*Pour qu'une variante complexe tende vers quelque limite, il faut et il suffit qu'elle soit convergente.*

5. *Lorsqu'une variante complexe est convergente, et qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de son indice elle reste constamment située dans quelque espace complet, sa limite  $y$  est elle-même nécessairement située.*

Car, autrement, cette limite serait complètement extérieure à l'espace dont il s'agit, ce qui est impossible, puisque la distance de la variante proposée à sa limite est infiniment petite.

6. *En désignant par  $(v)_m$  une variante complexe quelconque, et par*

$$(1) \quad m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$$

*des valeurs particulières distinctes de son indice se succédant indéfiniment suivant quelque loi déterminée, l'expression*

$$(w)_k = (v)_{m_k}$$

*est évidemment une variante complexe dépendant de l'indice  $k$ . Cela posé, si la variante  $(v)_m$  reste constamment comprise dans quelque portion limitée d'espace, la loi de succession des valeurs (1) peut être choisie de telle sorte que la variante  $(w)_k$  soit convergente (1).*

I. Désignons par  $\alpha, \beta, \dots$  des entiers indéterminés en nombre  $n$ , que nous conviendrons de considérer dans un ordre toujours le même, l'ordre  $\alpha, \beta, \dots$ , par exemple, et soient

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha', \beta', \dots, \\ \alpha'', \beta'', \dots \end{cases}$$

deux quelconques des combinaisons obtenues en attribuant aux entiers dont il s'agit tous les systèmes possibles de valeurs positives; ces combinaisons étant, bien entendu, supposées distinctes, les différences

$$(3) \quad \alpha' - \alpha'', \beta' - \beta'', \dots$$

---

(1) Voir le *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale* de M. Méray, p. 59.

ne peuvent s'annuler à la fois. Cela posé, nous dirons que la première des combinaisons (2) est de *taxe inférieure* ou *supérieure* à la seconde, suivant que la première des différences (3) qui ne s'évanouit pas est négative ou positive (1).

Il importe de faire à cet égard l'observation suivante. Si l'on désigne par

$$\begin{array}{l} \alpha', \beta', \dots, \\ \alpha'', \beta'', \dots, \\ \alpha''', \beta''', \dots \end{array}$$

trois combinaisons de valeurs attribuées aux entiers  $\alpha, \beta, \dots$ ; si l'on suppose en outre que la première soit de *taxe inférieure* à la seconde, et la seconde de *taxe inférieure* à la troisième, la première est nécessairement de *taxe inférieure* à la troisième. C'est là une conséquence immédiate des relations évidentes

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha''' &= (\alpha' - \alpha'') + (\alpha'' - \alpha'''), \\ \beta' - \beta''' &= (\beta' - \beta'') + (\beta'' - \beta'''), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

II. Désignant par  $x_0, y_0, \dots$  certaines valeurs particulières des  $n$  indéterminées  $x, y, \dots$ , et par  $X, Y, \dots$  d'autres valeurs particulières des mêmes indéterminées, nous nommerons *intervalle complexe* l'ensemble de tous les points dont les coordonnées  $x, y, \dots$  se trouvent respectivement comprises dans les *intervalles simples* de  $x_0$  à  $X$ , de  $y_0$  à  $Y, \dots$  (ou égales à quelques-unes de leurs valeurs extrêmes).

Nous nommerons *subdivision d'un intervalle complexe* l'opération consistant à subdiviser (de façons quelconques) les  $n$  intervalles simples dont l'association le constitue, puis à former de toutes les manières possibles un intervalle complexe avec  $n$  intervalles partiels pris respectivement dans chacun d'eux.

Nous aurons besoin ci-après de considérer dans un ordre déterminé les divers intervalles complexes provenant de la subdivision d'un intervalle donné; la loi de leur succession peut être choisie de bien des manières, et l'on peut, par exemple, la fixer comme il suit. En premier lieu, on adoptera pour les indéterminées  $x, y, \dots$  un ordre

---

(1) Voir GAUSS, *Werke*, Band III, p. 37.

toujours le même, soit l'ordre  $x, y, \dots$ . Considérant ensuite les intervalles simples partiels obtenus par la subdivision de l'intervalle total relatif à une indéterminée quelconque, on commencera par les ranger dans l'ordre naturel que leur assignent les valeurs croissantes de cette variable. Si l'on désigne alors par

$$\begin{array}{cccc} i_x^{(1)}, & i_x^{(2)}, & \dots, & i_x^{(k)}, \\ i_y^{(1)}, & i_y^{(2)}, & \dots, & i_y^{(k)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

les diverses suites d'intervalles simples ainsi obtenues, et que l'on associe ces derniers de toutes les manières possibles en prenant un terme et un seul dans chaque ligne horizontale du Tableau précédent, deux quelconques des intervalles complexes qui en résultent pourront être désignés par les notations

$$(4) \quad [i_x^{(\alpha')}, i_y^{(\beta')}, \dots],$$

$$(5) \quad [i_x^{(\alpha'')}, i_y^{(\beta'')}, \dots],$$

où les deux combinaisons d'entiers positifs

$$\begin{array}{ccc} \alpha', & \beta', & \dots, \\ \alpha'', & \beta'', & \dots \end{array}$$

sont nécessairement distinctes. Cela posé, nous dirons, pour abrégér, que l'intervalle partiel (4) est de *taxe inférieure* ou *supérieure* à l'intervalle partiel (5), suivant que la première des deux combinaisons dont il s'agit sera elle-même de taxe inférieure ou supérieure à la seconde (I), et nous conviendrons de considérer nos intervalles partiels complexes dans un ordre tel que leur taxe aille toujours en croissant; nous dirons, en pareil cas, qu'ils sont *ordonnés*.

Observons, en passant, qu'un intervalle complexe forme une portion limitée et complète de l'espace à  $n$  dimensions.

III. En vertu de l'hypothèse faite sur  $(v)_m$ , il existe évidemment quelque intervalle complexe

$$[x_0 \text{ à } X, y_0 \text{ à } Y, \dots],$$

dans lequel cette variante se trouve constamment comprise, et que nous représenterons, pour abrégér, par  $\mathfrak{J}_1$ . Si l'on divise en deux par-



ties égales chacun des intervalles simples dont se compose  $\mathfrak{J}_1$ , et qu'on ordonne (II) les divers intervalles complexes résultant de cette subdivision, il existe certainement quelqu'un de ces derniers où la variante  $(v)_m$  tombe un nombre infini de fois. Appelons  $\mathfrak{J}_2$  le premier d'entre eux pour lequel cette circonstance se réalise; opérons sur lui comme nous l'avons fait sur  $\mathfrak{J}_1$ , et ainsi de suite indéfiniment. Nous formerons de cette manière une suite illimitée d'intervalles complexes

$$(6) \quad \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \dots, \mathfrak{J}_k, \dots,$$

jouissant de la triple propriété que nous allons énoncer : 1° chacun d'eux fait entièrement partie du précédent et, par suite, de tous ceux qui viennent avant lui; 2° celui de rang  $k$  est formé d'intervalles simples ayant pour grandeurs respectives les valeurs numériques de

$$\frac{X - x_0}{2^{k-1}}, \frac{Y - y_0}{2^{k-1}}, \dots;$$

3° la variante  $(v)_m$  tombe une infinité de fois dans chacun des intervalles (6).

Cela posé, considérons la suite illimitée

$$(v)_1, (v)_2, \dots, (v)_m, \dots,$$

et soient  $(w)_1$  le premier terme de cette suite,  $(w)_2$  le premier des termes restants situé dans l'intervalle  $\mathfrak{J}_2$ ,  $(w)_3$  le premier des termes restants situé dans l'intervalle  $\mathfrak{J}_3$ , et ainsi de suite indéfiniment. La distance des deux points  $(w)_k, (w)_{k+h}$ , au plus égale à

$$\frac{1}{2^{k-1}} \sqrt{(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + \dots},$$

est infiniment petite pour  $k$  infini, et, par suite, la variante  $(w)_k$  est convergente (4).

#### Fonctions continues.

7. Considérons une fonction  $f(x, y, \dots)$  définie dans un fragment déterminé de l'espace à  $n$  dimensions, et désignons par  $(x_0, y_0, \dots)$  un point fixe, par  $(x, y, \dots)$  un point variable, situés l'un et l'autre

dans le fragment dont il s'agit : la fonction sera dite *continue au point*  $(x_0, y_0, \dots)$  *du fragment*, si, un nombre positif  $\alpha$  de petitesse arbitraire étant donné, on peut assigner un nombre positif  $\beta$ , tel que la différence

$$f(x, y, \dots) - f(x_0, y_0, \dots)$$

soit numériquement inférieure à  $\alpha$  lorsque les différences  $x - x_0$ ,  $y - y_0$ , ... sont toutes numériquement inférieures à  $\beta$ .

La fonction sera dite *continue dans le fragment considéré*, si elle l'est en chaque point du fragment.

8. Si l'on désigne par  $f(x, y, \dots)$  une fonction continue dans un espace donné, et que l'on substitue à  $x, y, \dots$  les coordonnées d'un point convergent finissant par ne jamais sortir de l'espace en question et ayant pour limite un point  $(\xi, \eta, \dots)$  de cet espace, le résultat de la substitution est une variante simple ayant pour limite  $f(\xi, \eta, \dots)$ .

9. Si la fonction  $f(x, y, \dots)$  est continue dans un espace limité et complet (2), on peut, un nombre positif  $\alpha$  de petitesse arbitraire étant donné, assigner un nombre positif  $\beta$ , tel que la différence

$$f(x_2, y_2, \dots) - f(x_1, y_1, \dots)$$

soit numériquement inférieure à  $\alpha$  toutes les fois que les points

$$(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots)$$

sont choisis dans l'espace en question, sous la seule condition que les différences

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, \dots$$

soient toutes numériquement inférieures à  $\beta$ .

1. 1<sup>o</sup> Nous aurons tout à l'heure à considérer dans un ordre déterminé les combinaisons deux à deux des intervalles complexes partiels provenant de la subdivision d'un intervalle complexe donné (6, II), c'est-à-dire les résultats obtenus en associant de toutes les manières possibles deux quelconques des intervalles partiels. La loi de leur succession peut être choisie de bien des manières, et l'on peut, par exemple, la fixer comme il suit. Les intervalles en question étant rangés d'après

leurs taxes croissantes (6, II), on associera d'abord le premier avec le deuxième, puis avec le troisième, etc. jusqu'au dernier; on associera ensuite le deuxième avec le troisième, puis avec le quatrième, etc. jusqu'au dernier; et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on ait été conduit à associer l'avant-dernier intervalle avec le dernier. Les combinaisons ainsi formées seront dites *ordonnées*, lorsqu'elles seront rangées à la suite les unes des autres dans l'ordre même qui a présidé à leur formation successive.

2° Étant donnés deux intervalles complexes que l'on considère l'un par rapport à l'autre dans un ordre déterminé, et auxquels on fait subir respectivement deux subdivisions quelconques (6, II), on conviendra de ranger dans l'ordre suivant les résultats obtenus en associant de toutes les manières possibles deux intervalles partiels respectivement fournis par ces deux subdivisions.

Avec les intervalles partiels provenant respectivement du premier et du second intervalle donné, on formera successivement un premier, puis un second groupe, et, dans chacun des groupes ainsi obtenus, on rangera les intervalles partiels d'après leurs taxes croissantes (6, II). On associera ensuite le premier intervalle du premier groupe avec le premier, le deuxième, le troisième, etc. du second groupe; puis le deuxième intervalle du premier groupe avec le premier, le deuxième, le troisième, etc. du second groupe; et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on ait été conduit à associer le dernier intervalle du premier groupe successivement avec tous ceux du second. Les combinaisons ainsi formées seront dites *ordonnées*, lorsqu'elles seront rangées à la suite les unes des autres dans l'ordre même qui a présidé à leur formation successive.

II. En nommant toujours  $f(x, y, \dots)$  la fonction dont il s'agit dans notre énoncé général, et désignant par  $\lambda, \mu$  deux constantes positives, supposons qu'il existe au moins un système de

- (7)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{deux points situés l'un et l'autre dans l'espace proposé et dont les} \\ \text{coordonnées semblables présentent des différences toutes numérique-} \\ \text{ment inférieures à } \mu, \text{ tandis que les valeurs prises par la fonction} \\ \text{aux deux points dont il s'agit présentent une différence numérique-} \\ \text{ment supérieure ou égale à } \lambda. \end{array} \right.$

Cela étant, on peut assigner suivant une loi déterminée un groupe de  $2n$  quantités

$$\xi', \eta', \dots, \xi'', \eta'', \dots,$$

rangées les unes par rapport aux autres dans un ordre également déterminé, et jouissant de la triple propriété : 1° que les points

$$(\xi', \eta', \dots), (\xi'', \eta'', \dots)$$

soient situés l'un et l'autre dans l'espace donné; 2° que les différences formées avec les coordonnées semblables de ces deux points ne soient pas numériquement supérieures à  $\mu$ ; 3° que la différence des valeurs prises par la fonction aux deux points dont il s'agit ne soit pas numériquement inférieure à  $\lambda$ .

Effectivement, l'espace dont il s'agit, étant limité, se trouve entièrement contenu dans quelque intervalle complexe (6, II), soit

$$[x_0 \text{ à } X, y_0 \text{ à } Y, \dots].$$

Si l'on divise en  $p$  parties égales chacun des intervalles simples de l'association desquels ce dernier résulte et que l'on considère les intervalles complexes partiels fournis par cette subdivision, il existe certainement quelque valeur de  $p$ , et par suite une valeur minima de cet entier, pour laquelle deux intervalles partiels distincts convenablement choisis contiennent respectivement deux points satisfaisant à la condition (7) : en effet, si deux semblables points (qui, par hypothèse, existent dans l'espace donné) se trouvaient, quel que soit  $p$ , situés l'un et l'autre dans un même intervalle partiel, leur distance serait inférieure à

$$\frac{1}{p} \sqrt{(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + \dots}$$

et par suite rigoureusement nulle, ce qui est impossible, puisque la fonction acquiert en ces deux points des valeurs différentes. Cela pose, attribuons à l'entier  $p$  la valeur minima dont il est question ci-dessus, ordonnons les combinaisons deux à deux des intervalles partiels qui résultent de la subdivision correspondante (I, 1°); arrêtons-nous à la première de ces combinaisons pour laquelle les deux intervalles composants contiennent respectivement deux points satisfaisant à la condi-

tion (7), et considérons ces deux intervalles l'un par rapport à l'autre dans l'ordre de leur taxe croissante, soit

$$\mathfrak{J}'_1 = [x'_0 \text{ à } X', y'_0 \text{ à } Y', \dots],$$

$$\mathfrak{J}''_1 = [x''_0 \text{ à } X'', y''_0 \text{ à } Y'', \dots];$$

effectuons maintenant sur chacun des intervalles complexes  $\mathfrak{J}'_1, \mathfrak{J}''_1$  la subdivision provenant du fractionnement en deux parties égales de tous les intervalles simples

$$x'_0 \text{ à } X', y'_0 \text{ à } Y', \dots,$$

$$x''_0 \text{ à } X'', y''_0 \text{ à } Y'', \dots;$$

associons de toutes les manières possibles un intervalle partiel (complexe) fourni par la première subdivision avec un intervalle partiel fourni par la seconde; puis, ordonnant les résultats ainsi obtenus (1, 2°), arrêtons-nous au premier d'entre eux pour lequel les deux intervalles composants contiennent respectivement deux points satisfaisant à la condition (7); désignons enfin par  $\mathfrak{J}_2$  l'intervalle composant extrait de  $\mathfrak{J}'_1$ , par  $\mathfrak{J}''_2$  l'intervalle composant extrait de  $\mathfrak{J}''_1$ , et considérons ces derniers l'un par rapport à l'autre dans l'ordre  $\mathfrak{J}'_2, \mathfrak{J}''_2$ . En opérant sur eux comme nous venons de le faire sur  $\mathfrak{J}'_1, \mathfrak{J}''_1$ , et ainsi de suite indéfiniment, nous obtiendrons deux suites illimitées

$$(8) \quad \mathfrak{J}'_1, \mathfrak{J}'_2, \dots, \mathfrak{J}'_q, \dots,$$

$$(9) \quad \mathfrak{J}''_1, \mathfrak{J}''_2, \dots, \mathfrak{J}''_q, \dots,$$

jouissant des propriétés ci-après : 1° dans l'une quelconque de ces suites, chaque intervalle complexe fait entièrement partie du précédent; 2° celui de rang  $q$  est formé d'intervalles simples ayant pour grandeurs respectives les valeurs absolues de

$$\frac{X' - x'_0}{2^{q-1}}, \quad \frac{Y' - y'_0}{2^{q-1}}, \quad \dots$$

ou de

$$\frac{X'' - x''_0}{2^{q-1}}, \quad \frac{Y'' - y''_0}{2^{q-1}}, \quad \dots,$$

selon qu'il s'agit de la suite (8) ou de la suite (9); 3° quelque valeur que l'on attribue à l'entier  $q$ , les deux intervalles  $\mathfrak{J}'_q, \mathfrak{J}''_q$  contiennent respectivement deux points satisfaisant à la condition (7).

Cela posé, nous désignerons par  $(u')_q$  la variante complexe ayant pour coordonnées les valeurs extrêmes minima des  $n$  intervalles simples qui constituent  $\mathfrak{J}'_q$ , par  $(u'')_q$  la variante complexe ayant pour coordonnées celles des  $n$  intervalles simples qui constituent  $\mathfrak{J}''_q$ , et nous démontrerons successivement les points suivants :

1° *La variante complexe  $(u')_q$  tend vers une limite  $(v')$  située dans l'un quelconque des intervalles (8) : car la distance des deux points  $(u')_q$ ,  $(u')_{q+r}$ , inférieure à*

$$(10) \quad \frac{1}{2^{q-1}} \sqrt{(X' - x'_0)^2 + (Y' - y'_0)^2 + \dots},$$

est infiniment petite pour  $q$  infini, et le point  $(u')_{q+r}$  reste compris, quel que soit  $r$ , dans l'espace complet  $\mathfrak{J}'_q$  (5).

On verra de même que *la variante complexe  $(u'')_q$  tend vers une limite  $(v'')$ , située dans l'un quelconque des intervalles (9).*

2° *Chacun des points  $(v')$ ,  $(v'')$  est nécessairement situé dans l'espace donné.*

Effectivement, si le point  $(v')$ , par exemple, n'en faisait pas partie, l'intervalle  $\mathfrak{J}'_q$  contiendrait nécessairement, en même temps que  $(v')$ , quelque point de l'espace dont il s'agit, et la distance de  $(v')$  à un pareil point pourrait ainsi devenir inférieure à la quantité (10), par suite à toute quantité donnée. Or, c'est là une conclusion absurde, puisque l'espace donné est complet, et que le point  $(v')$ , s'il n'y est pas compris, ne peut lui être que complètement extérieur (2).

3° *Les différences formées avec les coordonnées semblables des points  $(v')$ ,  $(v'')$  ne peuvent être numériquement supérieures à  $\mu$ .*

Soient

$$\begin{array}{l} \xi', \quad \eta', \quad \dots, \\ \xi'', \quad \eta'', \quad \dots \end{array}$$

les coordonnées respectives de ces deux points;

$$x', \quad y', \quad \dots$$

celles d'un point quelconque commun à  $\mathfrak{J}'_q$  et à l'espace donné;

$$x'', \quad y'', \quad \dots$$

celles d'un point quelconque commun à  $\mathfrak{J}''_q$  et à l'espace donné. La

relation

$$\xi'' - \xi' = (\xi'' - x'') - (\xi' - x') + (x'' - x')$$

donne immédiatement

$$\begin{aligned} \text{val. num. } (\xi'' - \xi') &\leq \text{val. num. } (\xi'' - x'') + \text{val. num. } (\xi' - x') \\ &\quad + \text{val. num. } (x'' - x'). \end{aligned}$$

Or on a, en valeur numérique,

$$\xi'' - x'' \leq \frac{X'' - x''_0}{2^{q-1}}, \quad \xi' - x' \leq \frac{X' - x'_0}{2^{q-1}},$$

et d'ailleurs les points  $(x', y', \dots)$ ,  $(x'', y'', \dots)$  peuvent toujours être choisis de telle manière que les différences formées avec leurs coordonnées semblables tombent numériquement au-dessous de  $\mu$ . Il en résulte

$$\text{val. num. } (\xi'' - \xi') < \frac{\text{val. num. } (X'' - x''_0)}{2^{q-1}} + \frac{\text{val. num. } (X' - x'_0)}{2^{q-1}} + \mu,$$

inégalité dont le premier membre est une constante, et dont le second tend vers  $\mu$  pour  $q$  infini; il est donc impossible que la constante en question soit supérieure à  $\mu$ .

4° *La différence des valeurs prises par la fonction aux points  $(v')$ ,  $(v'')$  ne peut être numériquement inférieure à  $\lambda$ .*

Si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} f(x'', y'', \dots) - f(x', y', \dots) &= A, \\ f(\xi', \eta', \dots) - f(x', y', \dots) &= A', \\ f(\xi'', \eta'', \dots) - f(x'', y'', \dots) &= A'', \end{aligned}$$

on a

$$f(\xi'', \eta'', \dots) - f(\xi', \eta', \dots) = A - A' + A'',$$

d'où

$$\text{val. num. } [f(\xi'', \eta'', \dots) - f(\xi', \eta', \dots)] \geq \text{val. num. } A - \text{val. num. } (A' - A''),$$

et à plus forte raison

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{val. num. } [f(\xi'', \eta'', \dots) - f(\xi', \eta', \dots)] \\ \geq \text{val. num. } A - \text{val. num. } A' - \text{val. num. } A''. \end{array} \right.$$

Or il résulte de la continuité de la fonction  $f(x, y, \dots)$  et des inégalités (numériques)

$$\begin{aligned}\zeta'' - x'' &\leq \frac{X'' - x_0''}{2^{q-1}}, & \zeta' - x' &\leq \frac{X' - x_0'}{2^{q-1}}, \\ \eta'' - y'' &\leq \frac{Y'' - y_0''}{2^{q-1}}, & \eta' - y' &\leq \frac{Y' - y_0'}{2^{q-1}}, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, & \end{aligned}$$

qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de  $q$ , les deux dernières différences  $A', A''$ , figurant dans le second membre de (11), tombent numériquement au-dessous d'une quantité donnée, si petite qu'on la suppose. D'ailleurs, les points  $(x', y', \dots)$  et  $(x'', y'', \dots)$  peuvent toujours être choisis de telle façon que la première  $A$  ne soit pas numériquement inférieure à  $\lambda$ . On aura donc

$$\text{val. num. } [f(\zeta'', \eta'', \dots) - f(\zeta', \eta', \dots)] > \lambda - \rho,$$

en désignant par  $\rho$  une quantité positive aussi petite qu'on le voudra. Dès lors, la constante qui forme le premier membre de cette dernière relation ne peut tomber au-dessous de  $\lambda$ .

III. Adoptons pour un instant la conclusion contraire à celle de notre énoncé général, et admettons qu'en désignant par  $\lambda$  une *constante positive convenablement choisie*, et par  $\mu$  une *quantité positive arbitraire*, il existe toujours quelque groupe de deux points satisfaisant à la condition (7).

D'après l'alinéa précédent (II), il existe alors une variante complexe

$$(v)_m = (x'_m, y'_m, \dots, x''_m, y''_m, \dots)$$

de nature telle : 1° que les deux points

$$\begin{aligned}(v')_m &= (x'_m, y'_m, \dots), \\ (v'')_m &= (x''_m, y''_m, \dots)\end{aligned}$$

tombent constamment dans l'espace proposé ; 2° que les coordonnées



de ces deux points vérifient les relations simultanées

$$\begin{aligned} \text{val. num. } (x''_m - x'_m) &\leq \frac{1}{m}, \\ \text{val. num. } (y''_m - y'_m) &\leq \frac{1}{m}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \text{val. num. } [f(x''_m, y''_m, \dots) - f(x'_m, y'_m, \dots)] &\geq \lambda. \end{aligned}$$

La variante  $(v)_m$  restant toujours dans un même fragment limité de l'espace à  $2n$  dimensions, une variante

$$(w)_k = ((^{(k)}x', ^{(k)}y', \dots, ^{(k)}x'', ^{(k)}y'', \dots),$$

convenablement extraite de  $(v)_m$ , sera convergente (6), par suite aussi les deux variantes

$$\begin{aligned} (w')_k &= ((^{(k)}x', ^{(k)}y', \dots), \\ (w'')_k &= ((^{(k)}x'', ^{(k)}y'', \dots). \end{aligned}$$

D'ailleurs, ces deux dernières tendent vers une limite commune : car les différences

$$^{(k)}x'' - ^{(k)}x', \quad ^{(k)}y'' - ^{(k)}y', \quad \dots$$

sont infiniment petites pour  $k$  infini, puisque les différences

$$x''_m - x'_m, \quad y''_m - y'_m, \quad \dots$$

le sont elles-mêmes pour  $m$  infini. Enfin, cette limite commune est nécessairement située dans l'espace donné, qui par hypothèse est complet (5). De ces circonstances, jointes à la continuité de  $f(x, y, \dots)$ , il résulte (8) que les deux quantités

$$f(^{(k)}x', ^{(k)}y', \dots), \quad f(^{(k)}x'', ^{(k)}y'', \dots)$$

tendent vers une même limite pour  $k$  infini, et par suite ont une différence infiniment petite, ce qui est impossible : car alors, et contrairement à ce qui précède, la différence

$$f(x''_m, y''_m, \dots) - f(x'_m, y'_m, \dots)$$

serait numériquement inférieure à  $\lambda$  pour des valeurs convenablement choisies de  $m$ .

10. *Lorsqu'une fonction est continue dans un espace limité et complet, sa valeur numérique  $y$  reste constamment inférieure à quelque quantité fixe.*

Soient  $\alpha$  un nombre positif choisi à volonté, et  $\beta$  un nombre positif remplissant les conditions indiquées par l'énoncé du numéro précédent. L'espace donné, étant limité, se trouve entièrement contenu dans quelque intervalle complexe (6, II), et celui-ci d'ailleurs peut être subdivisé de telle façon que, pour deux points choisis à volonté dans l'un quelconque des intervalles partiels résultant de cette subdivision (6, II), les différences formées avec les coordonnées semblables soient toutes numériquement inférieures à  $\beta$ . Si, désignant alors par  $g$  le nombre des intervalles partiels qui contiennent quelque point de l'espace donné, on choisit à volonté un semblable point dans chacun d'eux, et que l'on nomme  $M$  la plus grande des  $g$  valeurs numériques correspondantes de la fonction, il est clair qu'en un point quelconque de l'espace dont il s'agit la fonction sera numériquement inférieure à  $M + \alpha$ .

11. *Si la fonction  $f(x, y, \dots)$  est continue dans un espace limité et complet, et si la différence  $f(x, y, \dots) - C$ , où  $C$  désigne une constante,  $y$  peut devenir numériquement inférieure à toute quantité donnée, la fonction  $f(x, y, \dots)$  atteint certainement la valeur  $C$  en quelque point de l'espace dont il s'agit.*

1. *A toute quantité positive  $\omega$ , on peut faire correspondre, suivant une loi déterminée, un point de l'espace donné où la valeur numérique de  $f(x, y, \dots) - C$  ne surpasse pas  $\omega$ .*

Nous poserons

$$f(x, y, \dots) - C = F(x, y, \dots),$$

fonction évidemment continue, comme  $f(x, y, \dots)$ , dans l'espace donné.

Pour la même raison qu'aux nos 9 et 10, il existe quelque intervalle complexe  $\mathfrak{J}$ , dans lequel l'espace donné se trouve entièrement compris. Divisons en deux parties égales chacun des intervalles simples

$$x_0 \text{ à } X, \quad y_0 \text{ à } Y, \quad \dots,$$

de l'association desquels résulte l'intervalle  $\mathfrak{I}_1$ ; ordonnons (6. II) les intervalles partiels complexes fournis par cette subdivision, et appelons  $\mathfrak{I}_2$  le premier d'entre eux contenant quelque point de l'espace donné où la fonction  $F(x, y, \dots)$  soit numériquement inférieure à  $\omega$ . En opérant sur l'intervalle  $\mathfrak{I}_2$ , comme nous l'avons fait sur  $\mathfrak{I}_1$ , et ainsi de suite indéfiniment, nous obtiendrons une suite illimitée d'intervalles complexes

$$(12) \quad \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_q, \dots,$$

jouissant de la triple propriété que nous allons énoncer : 1° chacun d'eux fait entièrement partie du précédent; 2° celui de rang  $q$  est formé d'intervalles simples ayant pour grandeurs respectives les valeurs numériques de

$$\frac{X=1}{2^{q-1}}, \frac{Y=1}{2^{q-1}}, \dots;$$

3° chacun des intervalles (12) contient quelque point de l'espace donné où la fonction  $F(x, y, \dots)$  tombe numériquement au-dessous de  $\omega$ .

Cela posé, soit  $(u)_q$  la variante complexe ayant pour coordonnées les valeurs extrêmes minima des  $n$  intervalles simples dont est formé  $\mathfrak{I}_q$ ; on prouvera, par des raisonnements tout à fait analogues à ceux que nous avons employés en pareille circonstance dans l'alinéa II du n° 9 : 1° que la variante complexe  $(u)_q$  tend vers une limite  $(v)$  située dans l'un quelconque des intervalles (12); 2° que le point  $(v)$  fait nécessairement partie de l'espace donné; 3° que la valeur numérique acquise au point  $(v)$  par la fonction  $F(x, y, \dots)$  ne peut surpasser  $\omega$ .

II (\*). D'après l'alinéa précédent (1), il existe quelque variante complexe

$$(v)_m = (x_m, y_m, \dots),$$

tombant constamment dans l'espace proposé et donnant lieu à la relation

$$\text{val. num. } F(x_m, y_m, \dots) = \frac{1}{m},$$

(\*) Pour cette seconde partie de la démonstration, voir le *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale* de M. Méray, p. 59 et 60.

dont le premier membre est dès lors infiniment petit pour  $m$  infini. La variante  $(v)_m$  ne sortant jamais d'un espace limité, une variante

$$(w)_k = (x^{(k)}, y^{(k)}, \dots),$$

convenablement extraite de  $(v)_m$ , sera convergente (6), et rendra la quantité  $F(x^{(k)}, y^{(k)}, \dots)$  infiniment petite pour  $k$  infini; sa limite

$$(\Xi, H, \dots)$$

sera d'ailleurs située dans l'espace donné (5). Enfin, à cause de la continuité de la fonction  $F(x, y, \dots)$ , la variante (simple)  $F(x^{(k)}, y^{(k)}, \dots)$  aura pour limite  $F(\Xi, H, \dots)$  [8], d'où résulte

$$F(\Xi, H, \dots) = 0$$

ou

$$f(\Xi, H, \dots) = C.$$

12. Si la fonction  $f(x, y, \dots)$  est continue dans un espace limité et complet, on y peut assigner à sa valeur algébrique une limite supérieure et une limite inférieure, dont chacune est atteinte par la fonction en quelque point de l'espace donné.

Il résulte évidemment du n° 10 que l'on peut assigner quelque intervalle (simple) dont la valeur extrême minima soit surpassée (algébriquement) par  $f(x, y, \dots)$  en quelque point de l'espace donné, tandis que la valeur extrême maxima ne l'est jamais. Si l'on divise en deux parties égales l'intervalle dont il s'agit, il existe un de ces intervalles partiels et un seul jouissant de la même propriété. Sur celui-ci on peut raisonner comme sur le précédent, et ainsi de suite indéfiniment. On formera, de cette manière, une suite illimitée d'intervalles

$$(13) \quad \alpha_1 \text{ à } \Lambda_1, \quad \alpha_2 \text{ à } \Lambda_2, \quad \dots, \quad \alpha_m \text{ à } \Lambda_m, \quad \dots,$$

jouissant de la triple propriété que nous allons énoncer : 1° chacun d'eux est entièrement compris dans le précédent; 2° la différence  $\Lambda_m - \alpha_m$  a pour valeur  $\frac{\Lambda_1 - \alpha_1}{2^{m-1}}$ ; 3° la valeur extrême minima de chaque intervalle est surpassée par la fonction en quelque point de l'espace donné, tandis que la valeur extrême maxima ne l'est jamais.

Il résulte des deux premières propriétés que  $A_m$  tend vers une limite comprise dans chacun des intervalles (13). Cette limite ne peut être surpassée par la fonction en aucun point de l'espace donné; car alors  $A_m$  finirait par tomber au-dessous de quelque valeur de la fonction. Enfin cette limite est certainement atteinte en quelque point du même espace; car autrement l'intervalle de  $a_m$  à  $A_m$  comprendrait, en même temps qu'elle, quelque valeur de la fonction, et cette dernière s'approcherait indéfiniment de la limite en question, ce qui est impossible, à moins qu'elle ne l'atteigne (11).

Il existe donc une limite supérieure satisfaisant aux conditions énoncées, et l'on prouverait de même l'existence d'une limite inférieure.

#### Principe fondamental de la théorie des équations algébriques.

13. Nous nommerons *premier* et *second élément* de l'imaginaire  $a' + ia''$  les deux quantités réelles  $a'$ ,  $a''$ .

Si aux  $n$  variables

$$(14) \quad x = x' + ix'', \quad y = y' + iy'', \quad \dots$$

on attribue tous les systèmes possibles de valeurs imaginaires, les systèmes de valeurs réelles que prennent alors leurs éléments redonnent les divers points de l'espace indéfini à  $2n$  dimensions. Il arrive d'ailleurs sans cesse que l'on ait à considérer exclusivement dans telle ou telle question les systèmes de valeurs des  $n$  variables (14) fournis par tel ou tel groupe de conditions subsistant entre leurs  $2n$  éléments.

Dans les questions qui comportent la considération de  $n$  variables imaginaires, et par suite de l'espace à  $2n$  dimensions, on désigne un point quelconque de ce dernier tantôt par les  $n$  valeurs imaginaires attribuées aux variables dont il s'agit, tantôt par les  $2n$  valeurs réelles attribuées à leurs éléments.

14. Considérons une fonction de  $n$  variables imaginaires  $f(x, y, \dots)$ , définie dans un fragment déterminé de l'espace à  $2n$  dimensions, et désignons par  $(x_0, y_0, \dots)$  un point fixe, par  $(x, y, \dots)$  un point variable, situés l'un et l'autre dans le fragment dont il s'agit : la fonction

sera dite *continue au point*  $(x_0, y_0, \dots)$  *du fragment*, si, un nombre positif  $\alpha$  de petitesse arbitraire étant donné, on peut assigner un nombre positif  $\beta$ , tel que la différence

$$f(x, y, \dots) - f(x_0, y_0, \dots)$$

soit de module inférieur à  $\alpha$  lorsque les différences  $x - x_0, y - y_0, \dots$  sont toutes de modules inférieurs à  $\beta$ .

La fonction sera dite *continue dans le fragment considéré*, si elle l'est en chaque point du fragment.

Par exemple, *une fonction entière de  $n$  variables imaginaires est continue dans tout l'espace à  $2n$  dimensions.*

15. Il est clair que les deux éléments d'une fonction de  $n$  variables imaginaires, et par suite aussi son module, sont des fonctions réelles de leurs  $2n$  éléments. Cela posé, *lorsqu'une fonction de  $n$  variables imaginaires est continue dans un fragment donné de l'espace à  $2n$  dimensions, son module, considéré entre les mêmes limites, est une fonction continue des éléments des variables.*

Soient en effet  $f_0$  et  $f$  les valeurs respectivement acquises par la fonction donnée au point fixe

$$(x_0, y_0, \dots) = (x'_0 + ix''_0, y'_0 + iy''_0, \dots)$$

et au point variable

$$(x, y, \dots) = (x' + ix'', y' + iy'', \dots)$$

du fragment considéré. Puisque la fonction est supposée continue, on peut, un nombre positif  $\alpha$  étant donné, assigner un nombre positif  $\beta$ , tel que la relation

$$\text{mod}(f - f_0) < \alpha,$$

et à plus forte raison la relation

$$\text{val. num.}(\text{mod} f - \text{mod} f_0) < \alpha$$

soit une conséquence nécessaire des inégalités

$$\text{mod}(x - x_0) < \beta, \quad \text{mod}(y - y_0) < \beta, \quad \dots$$

Or il suffit, pour que ces dernières soient vérifiées, que les différences  $x' - x'_0$ ,  $x'' - x''_0$ ,  $y' - y'_0$ ,  $y'' - y''_0$ , ... soient toutes numériquement inférieures à  $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$ .

16. *Toute équation entière  $f(x) = 0$  admet quelque racine.*

I. Nous établirons d'abord le lemme suivant :

*Si le terme constant  $k$  est différent de zéro dans l'équation binôme*

$$x^m + k = 0,$$

*il existe quelque valeur de  $x$  rendant le module du premier membre inférieur à celui de  $k$  <sup>(1)</sup>.*

1° *Notre lemme est vrai pour une équation binôme de degré impair  $m = 2\mu + 1$ .*

Désignons en effet par  $k'$  et  $k''$  les éléments, non nuls à la fois, du terme constant  $k$ , et par  $\xi$  une quantité réelle provisoirement indéterminée. Pour  $x = \xi$ , le module du premier membre devient

$$(15) \quad \sqrt{(k' + \xi^m)^2 + k''^2};$$

pour  $x = i\xi$ , ce même module devient

$$(16) \quad \sqrt{k'^2 + [k'' + (-1)^\mu \xi^m]^2}.$$

Si donc  $k'$  n'est pas nul, l'expression (15) montre que la valeur  $x = \xi$  satisfera aux conditions de l'énoncé, pourvu que  $\xi$  soit de signe contraire à  $k'$  et que sa puissance  $m^{\text{ième}}$  lui soit numériquement inférieure; si  $k''$  n'est pas nul, l'expression (16) fait voir qu'il suffit de prendre  $x = i\xi$ , en choisissant pour  $\xi$  une valeur de signe contraire à  $(-1)^\mu k''$ , et dont la puissance  $m^{\text{ième}}$  soit numériquement inférieure à  $k''$ .

2° *Toute équation binôme du second degré admet quelque racine.*

Effectivement, soit

$$x^2 = a' + ia''$$

---

(1) La démonstration de ce lemme est empruntée au *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale* de M. Méray (p. 70 et 71).

l'équation considérée, où  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  désignent des quantités réelles. Si  $\alpha'$  et  $\alpha''$  sont nuls tous deux, l'équation est vérifiée pour  $x = 0$ . Si  $\alpha''$  seul est nul, elle l'est pour  $x = \sqrt{\alpha'}$  ou pour  $x = i\sqrt{-\alpha'}$ , suivant que  $\alpha'$  est positif ou négatif. Enfin, si  $\alpha''$  n'est pas nul et que  $\alpha$  désigne le module de  $\alpha' + i\alpha''$ , l'équation est vérifiée pour

$$x = \sqrt{\frac{\alpha + \alpha'}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha - \alpha'}{2}}$$

ou pour

$$x = \sqrt{\frac{\alpha + \alpha'}{2}} - i\sqrt{\frac{\alpha - \alpha'}{2}},$$

suivant que  $\alpha''$  est positif ou négatif.

3° *Notre lemme, démontré pour une valeur impaire de  $m$ , est vrai pour une valeur paire.*

On peut poser, en effet,  $m = 2^q \mu$ ,  $\mu$  étant impair. D'après ce qui précède (1°), (2°), il existe une valeur  $k_1$  vérifiant l'inégalité

$$\text{mod}(k_1^\mu + k) < \text{mod } k,$$

puis des valeurs  $k_2, k_3, \dots, k_{q+1}$  vérifiant les égalités successives

$$k_2^2 = k_1, \quad k_3^2 = k_2, \quad \dots, \quad k_{q+1}^2 = k_q,$$

de la combinaison desquelles on déduit

$$k_{q+1}^{2^q} = k_1.$$

Il en résulte évidemment

$$\text{mod}(k_{q+1}^{2^q \mu} + k) < \text{mod } k.$$

II. L'équation du premier degré  $ax + b = 0$  étant vérifiée pour  $x = -\frac{b}{a}$ , il suffit de faire voir que, si le théorème est vrai jusqu'au degré  $m - 1$  inclusivement, il est encore vrai pour le degré  $m$ .

Considérons donc une équation entière de degré  $m$

$$f(x) = 0;$$

désignons par  $\theta$  le module du terme constant et nommons  $R$  une quantité positive, telle que le module de  $f(x)$  soit supérieur à  $\theta$  pour toute



valeur de  $x = x' + ix''$  de module supérieur à  $R$ . Dans l'espace limité et complet que définissent les relations

$$-R \leq x' \leq R, \quad -R \leq x'' \leq R$$

(6, II), la plus petite valeur du module de  $f(x)$  (12) (13) (14) (15) est au plus égale à 0, et il résulte de là que, si l'on considère toutes les valeurs possibles de la variable imaginaire  $x$ , le module de la fonction atteint, pour quelqu'une d'entre elles, une valeur au-dessous de laquelle il ne tombe jamais. Nous avons à démontrer actuellement qu'une pareille valeur est de toute nécessité égale à zéro, et il suffit pour cela de faire voir que si une valeur  $x_0$  n'annule pas notre fonction entière, il existe quelque autre valeur de  $x$  rendant le module de la fonction inférieur à celui qu'elle prend pour  $x_0$ .

Or, en faisant  $x = x_0 + h$  et développant par la formule du binôme les divers termes de  $f(x_0 + h)$ , on a

$$(17) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf_1(x_0) + \dots + h^m f_m(x_0),$$

$f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ...,  $f_m(x)$  désignant certaines fonctions entières de degrés respectifs  $m-1$ ,  $m-2$ , ..., 0, et dont la dernière,  $f_m(x)$ , est précisément le coefficient du premier terme de  $f(x)$ . Dans le second membre de (17), les coefficients extrêmes  $f(x_0)$ ,  $f_m(x_0)$  sont donc l'un et l'autre différents de zéro.

Cela posé, si tous les coefficients intermédiaires sont nuls, il existe (I) quelque valeur de  $h$  rendant inférieur au module de  $f(x_0)$  celui de

$$h^m f_m(x_0) + f(x_0) = f(x_0 + h).$$

Si tous les coefficients intermédiaires ne sont pas nuls et si l'on suppose que  $f_p(x_0)$  soit le premier différent de zéro, la formule (17) devient

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h^p f_p(x_0) + \dots + h^m f_m(x_0).$$

Posons maintenant

$$\varphi(h) = \frac{f_{p+1}(x_0)}{f(x_0)} + \frac{f_{p+2}(x_0)}{f(x_0)} h + \dots + \frac{f_m(x_0)}{f(x_0)} h^{m-p-1},$$

et soient  $\mu$  la racine  $p^{\text{ième}}$  du module de  $\frac{f(x_0)}{f_p(x_0)}$ ,  $N$  une constante supérieure au module de  $\varphi(h)$  pour toutes les valeurs de  $h$  de module infé-

rieur à  $\mu$  (1), enfin  $H$  une quantité positive à la fois inférieure à 1 et à  $\frac{1}{N\mu^{p+1}}$ . Il est facile de voir que le module de  $f(x_0 + h)$  sera forcément inférieur à celui de  $f(x_0)$ , si l'on prend pour  $h$  une valeur vérifiant l'équation entière

$$h^p = -H^p \frac{f(x_0)}{f_p(x_0)},$$

dont le degré  $p$  est supérieur à zéro et inférieur à  $m$ . On a effectivement, en pareil cas,

$$f(x_0 + h) = (1 - H^p)f(x_0) + h^{p+1}f(x_0)\varphi(h),$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{mod } f(x_0 + h) &\leq \text{mod } f(x_0) \{1 - H^p + \text{mod}[h^{p+1}\varphi(h)]\} \\ &< \text{mod } f(x_0) [1 - H^p + N\mu^{p+1}H^{p+1}]. \end{aligned}$$

D'ailleurs, à cause de  $H < \frac{1}{N\mu^{p+1}}$ , la quantité entre crochets qui figure dans la dernière relation est inférieure à l'unité, et il en résulte

$$\text{mod } f(x_0 + h) < \text{mod } f(x_0).$$

(1) Il suffit de prendre  $N$  supérieur à

$$\text{mod } \frac{f_{p+1}(x_0)}{f(x_0)} + \mu \text{mod } \frac{f_{p+2}(x_0)}{f(x_0)} + \dots + \mu^{m-p-1} \text{mod } \frac{f_m(x_0)}{f(x_0)}.$$



---

SUR LES

# DISSOLUTIONS D'UN SEL MAGNÉTIQUE,

PAR P. DUHEM.

---

Il ne paraît pas que les propriétés d'une dissolution formée par un sel sensible à l'action de l'aimant aient été jusqu'ici l'objet d'aucune étude théorique. La Thermodynamique, cependant, fournit une démonstration très simple de quelques-unes de ces propriétés; certaines des conclusions auxquelles elle parvient paraissent susceptibles d'une vérification expérimentale. C'est à l'exposé de ces conséquences de la Thermodynamique que sera consacré ce Mémoire.

## § I. — Potentiel thermodynamique d'un système aimanté renfermant une dissolution.

Le potentiel thermodynamique interne d'un système aimanté peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{F} = E(Y - T\Sigma) + \mathcal{F} + \int \mathcal{F}(\mathcal{M}) dv.$$

Dans cette formule,

$E$  est l'équivalent mécanique de la chaleur;

$T$  est la température absolue;

$Y$  est l'énergie interne que posséderait le système si on le ramenait à l'état neutre magnétique;

$\Sigma$  est l'entropie qu'il posséderait dans les mêmes conditions;

$\mathcal{F}$  est le potentiel magnétique;

$\mathcal{M}$  est l'intensité d'aimantation en un point de l'élément  $dv$ ;

$\mathcal{F}(\mathcal{M})$  est une fonction dont la forme dépend de la nature de la substance qui compose l'élément  $dv$ ;

le signe  $\int$  enfin indique une intégration qui s'étend à tous les éléments de volume du système.

Ce potentiel thermodynamique interne ne figure jamais, dans aucune question, que par sa variation; il en résulte que l'on peut, sans inconvénient, y supprimer tous les termes qui sont assujettis à demeurer constants.

Supposons le système formé d'aimants permanents 1 et d'un corps parfaitement doux 2; soit  $dv_1$  un élément de volume des aimants permanents; soit  $dv_2$  un élément de volume du corps parfaitement doux; l'aimantation a pour composantes  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$  en un point du premier élément, et  $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$  en un point du second; soient  $\mathfrak{V}_1$  la fonction potentielle magnétique des aimants permanents et  $\mathfrak{V}_2$  la fonction potentielle de l'aimantation distribuée sur le corps parfaitement doux. Nous aurons

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} = & \frac{1}{2} \int \left( \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_1} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y_1} + \mathfrak{C}_1 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z_1} \right) dv_1 \\ & + \int \left( \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{1}{2} \int \left( \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z_2} \right) dv_2. \end{aligned}$$

Mais les aimants permanents ayant une forme et une aimantation invariables, la quantité

$$\frac{1}{2} \int \left( \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_1} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y_1} + \mathfrak{C}_1 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z_1} \right) dv_1$$

demeure absolument invariable, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} = & \int \left( \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{1}{2} \int \left( \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z_2} \right) dv_2, \end{aligned}$$

en négligeant, comme nous l'avons dit, les termes constants.

Nous admettrons que les aimants permanents sont formés par une substance de constitution invariable, tandis que le corps parfaitement doux aura une constitution variable; ce dernier sera formé par une

dissolution dont la concentration pourra être différente d'un point à l'autre au même instant et d'un instant à l'autre au même point. Cette dissolution sera incompressible, de telle façon que la densité en chaque point dépende uniquement de la concentration au même point. En désignant par  $s$  cette concentration, on pourra écrire

$$E(Y - T\Sigma) = \int \Phi(s) dv_1,$$

$\Phi(s)$  étant une certaine fonction de  $s$  dont il n'est pas utile pour le moment de préciser davantage la nature.

L'aimantation des aimants permanents étant invariable, on peut réduire

$$\int \tilde{f}(\mathcal{M}) dv$$

à la quantité

$$\int \tilde{f}(\mathcal{M}, s) dv_1.$$

De ces diverses considérations il résulte que, le potentiel thermodynamique interne d'un système formé par des aimants permanents et une dissolution magnétique peut s'écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{f} = & \int \left( \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z_2} \right) dv_1 \\ & + \frac{1}{2} \int \left( \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \int [\Phi(s) + \tilde{f}(\mathcal{M}, s)] dv_1. \end{aligned} \right.$$

## § II. — Aimantation d'une dissolution magnétique.

Imaginons que les composantes  $\mathfrak{A}_2$ ,  $\mathfrak{B}_2$ ,  $\mathfrak{C}_2$  de l'aimantation aux divers points de la dissolution éprouvent des variations arbitraires  $\delta \mathfrak{A}_2$ ,  $\delta \mathfrak{B}_2$ ,  $\delta \mathfrak{C}_2$ . Le potentiel thermodynamique interne, défini par l'égalité (1), subira une variation donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} \delta \tilde{f} = \int \left\{ \left[ \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{f}(\mathcal{M}, s)}{\partial \mathcal{M}} \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathcal{M}} \right] \delta \mathfrak{A}_2 \right. \\ + \left[ \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial y_2} + \frac{\partial \tilde{f}(\mathcal{M}, s)}{\partial \mathcal{M}} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathcal{M}} \right] \delta \mathfrak{B}_2 \\ \left. + \left[ \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial z_2} + \frac{\partial \tilde{f}(\mathcal{M}, s)}{\partial \mathcal{M}} \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathcal{M}} \right] \delta \mathfrak{C}_2 \right\} dv_1. \end{aligned}$$

Cette variation doit, pour l'équilibre, être égale à zéro, quelles que soient les quantités  $\delta \mathfrak{A}_2$ ,  $\delta \mathfrak{B}_2$ ,  $\delta \mathfrak{C}_2$ . On doit donc avoir, en tout point de la dissolution,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_2 = -F(\mathfrak{M}, s) \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2}, \\ \mathfrak{B}_2 = -F(\mathfrak{M}, s) \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial y_2}, \\ \mathfrak{C}_2 = -F(\mathfrak{M}, s) \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial z_2}, \end{array} \right.$$

égalités dans lesquelles on a posé

$$(3) \quad F(\mathfrak{M}, s) = - \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}}}.$$

La fonction  $F(\mathfrak{M}, s)$  est la fonction magnétisante. Un cas approximatif intéressant est celui où elle se transforme en un coefficient d'aimantation indépendant de l'intensité d'aimantation.

Ce coefficient dépend de la concentration de la dissolution. Il peut arriver que le dissolvant, pris à l'état de pureté, soit tellement peu sensible à l'action de l'aimant qu'on puisse, sans erreur notable, le regarder comme non magnétique; c'est ce qui arrivera, par exemple, pour l'eau, si l'on compare son aimantation à celle d'un composé fer-rugineux en dissolution. Dans ce cas, du moins pour les faibles concentrations, on peut regarder ce coefficient comme proportionnel à la concentration. Les équations (2) deviennent alors

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_2 = -Ks \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2}, \\ \mathfrak{B}_2 = -Ks \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial y_2}, \\ \mathfrak{C}_2 = -Ks \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial z_2}, \end{array} \right.$$

$K$  étant un coefficient qui dépend de la nature du sel dissous et de la température.

Ce coefficient est, en général, assez petit; il en est alors de même de  $\mathfrak{A}_2$ ,  $\mathfrak{B}_2$ ,  $\mathfrak{C}_2$  et partant de  $\mathfrak{V}_2$ ; de sorte que, si l'on néglige les termes

de l'ordre de  $K^2$  devant les termes de l'ordre de  $K$ , les équations précédentes prennent la forme approchée

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_2 = -Ks \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_2}, \\ \mathfrak{B}_2 = -Ks \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y_2}, \\ \mathfrak{C}_2 = -Ks \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z_2}. \end{array} \right.$$

D'une manière générale, on a

$$(6) \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} d\mathfrak{M}.$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$F(\mathfrak{M}, s) = Ks,$$

cette relation devient

$$(7) \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2Ks}.$$

### § III. — Conditions d'équilibre d'une dissolution magnétique; conditions hydrostatiques.

Une dissolution magnétique 2 est soumise à l'action d'aimants permanents 1. Aux divers éléments  $d\omega$  de la surface déformable qui limite cette dissolution sont appliquées des pressions normales  $P d\omega$ . Aux divers éléments de volume  $d\nu$  de cette dissolution sont appliquées des forces extérieures. Les composantes de la force appliquée à l'élément  $d\nu_2$  sont

$$X = -\rho(s) \frac{\partial V}{\partial x_2} d\nu_2,$$

$$Y = -\rho(s) \frac{\partial V}{\partial y_2} d\nu_2,$$

$$Z = -\rho(s) \frac{\partial V}{\partial z_2} d\nu_2,$$

$\rho(s)$  étant la densité en un point de l'élément  $d\nu_2$ , et  $V$  une fonction

uniforme finie et continue de  $x_2, y_2, z_2$ , fonction dont la forme ne dépend pas de la figure du fluide.

Ces dernières forces extérieures admettent un potentiel qui est donné par l'expression

$$(8) \quad W = \int \rho(s) V dv_2,$$

les sommations s'étendant au volume entier du fluide.

Cherchons à quelles conditions la dissolution considérée pourra demeurer immobile.

*Pour que l'équilibre soit assuré, il faut et il suffit que, dans toute déformation virtuelle imposée au fluide, la variation éprouvée par le potentiel thermodynamique interne du fluide soit égale ou supérieure au travail effectué par les forces extérieures.*

Si l'on désigne par  $\mathcal{F}$  le potentiel thermodynamique interne du fluide, par  $d\mathcal{E}_e$  le travail des forces extérieures, cette condition s'exprimera ainsi

$$\delta \mathcal{F} \geq d\mathcal{E}_e$$

ou

$$(9) \quad \delta \mathcal{F} - d\mathcal{E}_e \geq 0.$$

Dans le cas particulier où la déformation virtuelle imposée au fluide est *renversible*, c'est-à-dire où l'on obtient une nouvelle déformation virtuelle en changeant tous les signes des déplacements que les divers points éprouvent dans la première, le signe d'inégalité doit évidemment disparaître de la condition précédente, qui devient

$$(10) \quad \delta \mathcal{F} - d\mathcal{E}_e = 0.$$

Le travail externe  $d\mathcal{E}_e$  est la somme du travail  $d\mathcal{E}'_e$  effectué par les pressions que supporte la surface du fluide et du travail  $d\mathcal{E}''_e$  des forces appliquées à ses divers éléments de volume

$$(11) \quad d\mathcal{E}_e = d\mathcal{E}'_e + d\mathcal{E}''_e.$$

Nous avons d'ailleurs

$$(13) \quad d\mathcal{E}'_e = \int P [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\omega,$$



$u, v, w$  étant les composantes du déplacement d'un point de l'élément  $d\omega$ ;  $N_i$  étant la normale à cet élément vers l'intérieur du fluide, et l'intégrale s'étendant à la surface déformable qui limite le fluide.

Le travail  $d\tilde{\epsilon}_e''$  est égal à la variation changée de signe de la quantité  $W$ . Si  $\delta s$  est la variation que subit la concentration au point  $(x_2, y_2, z_2)$ ; si  $u, v, w$  sont les composantes du déplacement du point matériel qui avait pour coordonnées initiales  $x_2, y_2, z_2$ ; si nous remarquons enfin que

$$\delta dv_2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) dv_2,$$

nous aurons

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} d\tilde{\epsilon}_e'' &= - \int V \frac{d\rho(s)}{ds} \delta s dv_2 \\ &\quad - \int \rho(s) \left( \frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w \right) dv_2 \\ &\quad - \int V \rho(s) \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ &\quad - \int V \frac{d\rho(s)}{ds} \left( \frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v + \frac{\partial s}{\partial z} w \right) dv_2. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (11), (12), (13) nous fournissent l'expression complète de  $d\tilde{\epsilon}_e$ .

Calculons maintenant la variation  $\delta\tilde{\mathcal{F}}$  subie par le potentiel thermodynamique interne de la dissolution.

D'après l'égalité (1), on peut écrire

$$(14) \quad \delta\tilde{\mathcal{F}} = A + B + C,$$

les trois quantités  $A, B, C$  ayant les significations suivantes :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \delta \int \Phi(s) dv_2, \\ B &= \delta \int \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{N}, s) dv_2, \\ C &= \delta \int \left( \mathfrak{a}_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \mathfrak{b}_2 \frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \mathfrak{c}_2 \frac{\partial v_1}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta \int \left( \mathfrak{a}_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \mathfrak{b}_2 \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \mathfrak{c}_2 \frac{\partial v_2}{\partial z_2} \right) dv_2, \end{aligned} \right.$$

Calculons successivement les trois quantités A, B, C.

1<sup>o</sup> *Calcul de A.* — Le calcul de A est facile; le volume de l'élément  $dv_2$  augmente de

$$\delta dv_2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) dv_2.$$

En même temps, la concentration en un point de cet élément augmente de  $\delta s$ . On a donc

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} A = & \int \left[ \frac{d\Phi(s)}{ds} \delta s + \Phi(s) \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) \right] dv_2 \\ & + \int \frac{d\Phi(s)}{ds} \left( \frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v + \frac{\partial s}{\partial z} w \right) dv_2. \end{aligned} \right.$$

2<sup>o</sup> *Calcul de B.* — Supposons que, dans la déformation du fluide, chaque élément entraîne avec lui son aimantation sans que celle-ci change de grandeur ni de direction;  $\mathfrak{M}$  demeurera invariable, et l'on aura simplement

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} B = & \int \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} \delta s + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) \right] dv_2 \\ & + \int \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} \left( \frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v + \frac{\partial s}{\partial z} w \right) dv_2. \end{aligned} \right.$$

3<sup>o</sup> *Calcul de C.* — La quantité dont C est la variation dépend uniquement de la forme du fluide et de l'aimantation de chaque élément de volume. Donc, pour calculer C, on peut calculer la variation subie par la quantité en question dans une série quelconque de modifications amenant les éléments dont il s'agit du même état initial au même état final que la modification considérée.

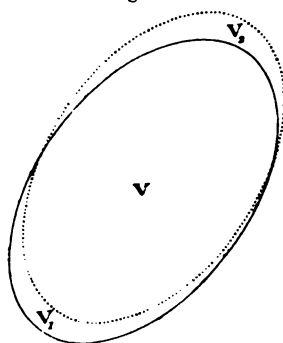
Soient

V (*fig. 1*) le volume occupé par le fluide avant et après la modification;  
 $V_1$  le volume qui était rempli par du fluide avant la modification et ne l'est pas après;  
 $V_2$  le volume qui n'était pas rempli par le fluide avant la modification et l'est après.

Il est aisé de voir que, en négligeant les infiniment petits d'ordre

supérieur, la modification considérée pourra être regardée comme résultant des modifications suivantes :

Fig. 1.



1° En tout point du volume  $v_2 = V + V_1$ , on donne à  $\mathfrak{a}_2$ ,  $\mathfrak{b}_2$ ,  $\mathfrak{c}_2$  des variations

$$\delta \mathfrak{a}_2 = - \left( \frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial x_2} u + \frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial y_2} v + \frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial z_2} w \right),$$

$$\delta \mathfrak{b}_2 = - \left( \frac{\partial \mathfrak{b}_2}{\partial x_2} u + \frac{\partial \mathfrak{b}_2}{\partial y_2} v + \frac{\partial \mathfrak{b}_2}{\partial z_2} w \right),$$

$$\delta \mathfrak{c}_2 = - \left( \frac{\partial \mathfrak{c}_2}{\partial x_2} u + \frac{\partial \mathfrak{c}_2}{\partial y_2} v + \frac{\partial \mathfrak{c}_2}{\partial z_2} w \right).$$

2° On supprime ce qui se trouve à l'intérieur du volume  $V_1$ .

3° On remplit le volume  $V_2$  par une masse de fluide aimanté dont l'aimantation en chaque point ait sensiblement même grandeur et même direction qu'aux points du volume  $V$  infiniment voisins de celui-là.

On a alors

$$(18) \quad C = C' + C'' + C''',$$

$C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$  étant les quantités analogues à  $C$  relatives à ces trois modifications partielles.

Si le volume et la forme du fluide demeurent invariables et si, en même temps,  $\mathfrak{a}_2$ ,  $\mathfrak{b}_2$ ,  $\mathfrak{c}_2$  subissent des variations quelconques  $\delta \mathfrak{a}_2$ ,  $\delta \mathfrak{b}_2$ ,  $\delta \mathfrak{c}_2$ , on sait que la quantité

$$\int \left( \mathfrak{a}_2 \frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial x_2} + \mathfrak{b}_2 \frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial y_2} + \mathfrak{c}_2 \frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial z_2} \right) dv_2 + \frac{1}{2} \int \left( \mathfrak{a}_2 \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{b}_2 \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{c}_2 \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial z_2} \right) dv_2$$

subit une variation

$$\int \left[ \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} \delta \mathfrak{A}_2 + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} \delta \mathfrak{B}_2 + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \delta \mathfrak{C}_2 \right] dv_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} C' = - \int \bigg\{ & \left[ \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial x_2} \right] u \\ & + \left[ \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial y_2} \right] v \\ & + \left[ \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial z_2} + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial z_2} + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial z_2} \right] w \bigg\} dv_2 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (19) \quad C' = - \int \bigg\{ & \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \right] u \\ & + \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \right] v \\ & + \frac{\partial}{\partial z_2} \left[ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \right] w \bigg\} dv_2 \\ & + \int \bigg\{ \left[ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial x_2^2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial x_2 \partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial x_2 \partial z_2} \right] u \\ & + \left[ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial x_2 \partial y_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial y_2^2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial y_2 \partial z_2} \right] v \\ & + \left[ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial x_2 \partial z_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial y_2 \partial z_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial z_2^2} \right] w \bigg\} dv_2. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par  $d\omega$ , l'un des éléments de la surface  $\omega$  qui confinent au volume  $V_1$ , on verra facilement que

$$(20) \quad \left\{ C'' = - \mathbf{S} \left[ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \right] \right. \\ \left. \times [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\omega_1. \right.$$

De même, si  $d\omega_2$  désigne un élément de la surface  $\omega$  contigu au volume  $v_2$ , on aura

$$(21) \quad \left\{ C'' = - \mathbf{S} \left[ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z_2} \right] \right. \\ \left. \times [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\omega_2. \right.$$

Les égalités (2) donnent

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_2 \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial z_2} &= -\frac{\mathfrak{N}^2}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}, \\ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2^2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2 \partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2 \partial z_2} &= -\frac{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right]^2, \\ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2 \partial y_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial y_2^2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2 \partial z_2} &= -\frac{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}{2} \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right]^2, \\ \mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x_2 \partial z_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial y_2 \partial z_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial z_2^2} &= -\frac{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}{2} \frac{\partial}{\partial z_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right]^2, \end{aligned}$$

Moyennant ces relations, les égalités (18), (19), (20) et (21) donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{S}_{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}^{\mathfrak{N}^2} [u \cos(\mathbf{N}_i, x) + v \cos(\mathbf{N}_i, y) + w \cos(\mathbf{N}_i, z)] d\omega \\ &\quad - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}^2}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right] u + \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}^2}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right] v + \frac{\partial}{\partial z_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}^2}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right] w \right\} dv_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \mathbf{F}(\mathfrak{N}, s) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 u + \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 v + \frac{\partial}{\partial z_2} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 w \right\} dv_2 \end{aligned}$$

ou bien, par des intégrations par parties,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{2} \mathbf{S}_{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}^{\mathfrak{N}^2} [u \cos(\mathbf{N}_i, x) + v \cos(\mathbf{N}_i, y) + w \cos(\mathbf{N}_i, z)] d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{\mathfrak{N}^2}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathfrak{N}, s)}{\partial z} w \right] dv_2. \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant écrire que, dans toute modification du fluide compatible avec son incompressibilité et où chaque élément se déplace en gardant une aimantation invariable de grandeur et de direction, on a, conformément aux égalités ou inégalités (9) et (14),

$$(23) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \geq d\mathfrak{C}'_e + d\mathfrak{C}''_e.$$

Nous appliquerons successivement cette condition (23) à diverses espèces de modifications.

Imaginons, en premier lieu, que l'on ait tracé à l'intérieur du liquide une surface canal infiniment déliée et fermée sur elle-même. Soit  $\Omega$  la

section droite de cette surface canal. Par des sections droites équidistantes et infiniment rapprochées, divisons cette surface canal en tronçons de même volume. Soit  $dl$  la longueur d'un de ces tronçons et  $d\varphi_2 = \Omega dl$  leur volume commun. Chacun de ces tronçons gardant une concentration invariable et une aimantation invariable de grandeur et de direction, faisons-le progresser d'une même longueur  $\delta l$  parallèlement à une directrice de la surface canal : nous aurons, pour ce tronçon,

$$u = \frac{dx_2}{dl} \delta l, \quad v = \frac{dy_2}{dl} \delta l, \quad w = \frac{dz_2}{dl} \delta l.$$

Laissons immobile le reste du liquide.

Le travail des forces extérieures, donné par les égalités (12) et (13), se réduit à

$$d\mathcal{E}_e = -\Omega \delta l \int_l \rho(s) \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dl} \right) dl,$$

l'intégration s'étendant à la directrice de la surface canal, c'est-à-dire à une ligne fermée quelconque tracée au sein du liquide.

La concentration de chaque élément de volume et, partant, son volume, demeurant invariables, les égalités (16) et (17) donnent

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Enfin, l'égalité (22) devient

$$C = \frac{1}{2} \Omega dl \int_l \left[ \frac{\mathfrak{N}}{F(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 \left[ \frac{\partial F(\mathfrak{N}, s)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{N}, s)}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{N}, s)}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dl} \right] dl.$$

La modification est d'ailleurs renversible; la condition (23) devient donc

$$\begin{aligned} & \int_l \left( \left\{ \left[ \frac{\mathfrak{N}}{F(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{N}, s)}{\partial x_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\} \frac{dx_2}{dl} \right. \\ & \quad + \left\{ \left[ \frac{\mathfrak{N}}{F(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{N}, s)}{\partial y_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial y_2} \right\} \frac{dy_2}{dl} \\ & \quad \left. + \left\{ \left[ \frac{\mathfrak{N}}{F(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{N}, s)}{\partial z_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial z_2} \right\} \frac{dz_2}{dl} \right) dl = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit la forme de la courbe fermée  $l$  tracée à l'intérieur du liquide à laquelle s'étend l'intégration.

D'après la théorie des intégrales curvilignes, cette condition équivaut à la proposition suivante :

*Il existe une fonction  $\Pi(x, y, z)$  finie, continue et uniforme à l'intérieur du fluide, telle que l'on ait, en tout point du fluide,*

$$(24) \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\partial \Pi, s)}{\partial \Pi} d\partial \Pi + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\partial \Pi, s)}{\partial s} ds + \rho(s) dV = d\Pi.$$

Ce premier résultat obtenu, considérons de nouveau une surface canal infiniment déliée, mais aboutissant par ses deux extrémités M et M' à la surface déformable du fluide sur laquelle elle découpe deux éléments  $\omega$  et  $\omega'$ . Imposons au fluide que renferme ce canal un écoulement  $\delta l$  allant de M vers M', écoulement soumis aux mêmes restrictions que le précédent.

Pour l'élément  $\omega$ , la quantité

$$P[u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\omega$$

a la valeur

$$P \omega \delta l \cos(\delta l, N_i) = P \Omega \delta l.$$

Pour l'élément  $\omega'$ , cette même quantité a pour valeur

$$P' \omega' \delta l \cos(\delta l, N'_i) = -P' \Omega \delta l.$$

Par conséquent, d'après les égalités (12) et (13), on a

$$d\mathcal{E}'_e + d\mathcal{E}''_e = \left[ P - P' - \int_M^{M'} \rho(s) \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dl} \right) dl \right] \Omega \delta l.$$

Les égalités (16) et (17) donnent encore, comme dans le cas précédent,

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Enfin l'égalité (22) devient

$$C = \left\{ \frac{\partial \Pi^2}{2F(\partial \Pi, s)} - \frac{\partial \Pi'^2}{2F(\partial \Pi', s')} + \frac{1}{2} \int_M^{M'} \left[ \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} \right]^2 \left[ \frac{\partial F(\partial \Pi, s)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial F(\partial \Pi, s)}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial F(\partial \Pi, s)}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dl} \right] dl \right\} \Omega \delta l.$$

La modification virtuelle imposée au fluide est encore une modifica-

tion renversible, en sorte que la condition (23) devient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Pi^2}{2F(\partial \Pi, s)} - P - \frac{\partial \Pi'^2}{2F(\partial \Pi', s')} + P' \\ & + \frac{1}{2} \int_M^{M'} \left\{ \left[ \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\partial \Pi, s)}{\partial x_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\} \frac{dx_2}{dl} \\ & + \left\{ \left[ \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\partial \Pi, s)}{\partial y_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial y_2} \right\} \frac{dy_2}{dl} \\ & + \left\{ \left[ \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\partial \Pi, s)}{\partial z_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial z_2} \right\} \frac{dz_2}{dl} \Bigg\} dl = 0 \end{aligned}$$

ou bien, d'après l'égalité (24),

$$(25) \quad P + \Pi - \frac{\partial \Pi^2}{2F(\partial \Pi, s)} = P' + \Pi' - \frac{\partial \Pi'^2}{2F(\partial \Pi', s')}.$$

D'où cette nouvelle proposition :

*La quantité*

$$P + \Pi - \frac{\partial \Pi^2}{2F(\partial \Pi, s)}$$

*a la même valeur en tout point de la surface déformable du fluide, ce qu'exprime l'égalité*

$$(26) \quad P + \Pi - \frac{\partial \Pi^2}{2F(\partial \Pi, s)} = K.$$

Les conditions d'équilibre (24) et (26), que nous venons d'obtenir, ont été déduites de l'étude de modifications renversables; considérons maintenant une modification non renversible définie de la manière suivante :

Une surface canal, de section  $\Omega$ , part d'un point  $M$  pris à l'intérieur du fluide pour aboutir à un point  $M_1$  de sa surface déformable; cette surface limite un canal infiniment délié; à chaque élément  $dv_2 = \Omega dl$  de ce canal, on impose un écoulement  $\delta l$  de  $M$  vers  $M_1$ , de manière qu'une cavité, de volume  $\Omega \delta l$ , vient se creuser autour du point  $M$ .

Dans ces conditions, les égalités (12) et (13) donneront

$$d\mathfrak{E}'_e + d\mathfrak{E}''_e = - \left[ P_1 + \int_M^{M_1} \rho(s) \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dl} \right) dl \right] \Omega dl,$$

$P$ , étant la pression au point  $M$ , de la surface déformable.



Les égalités (16) et (17) donnent encore, comme dans le cas précédent,

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Pour déduire C de l'égalité (22), on doit remarquer que la surface de la cavité qui s'est creusée dans l'intérieur du fluide doit être regardée comme faisant partie de sa surface déformable; soit  $\varpi$  un élément de cette surface, et cherchons la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\partial \mathcal{N}^2}{\mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\varpi,$$

étendue aux éléments de cette surface;  $N_i$  représente la normale vers l'intérieur du liquide et par conséquent vers l'extérieur de la cavité.

La cavité étant infiniment petite,  $\frac{\partial \mathcal{N}^2}{\mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)}$  a sensiblement la même valeur en tous les points de sa surface. La quantité précédente peut donc s'écrire

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{N}^2}{\mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)} \mathbf{S} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\varpi.$$

D'ailleurs,

$$\mathbf{S} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\varpi$$

représente l'accroissement du volume enfermé dans la cavité; cette cavité ayant pour volume initial 0 et pour volume final  $\Omega \delta l$ , on voit que l'on a

$$\frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\partial \mathcal{N}^2}{\mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\varpi = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{N}^2}{\mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)} \Omega \delta l.$$

L'égalité (22) donne donc, dans le cas actuel,

$$C = \left\{ \frac{\partial \mathcal{N}^2}{2 \mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)} - \frac{\partial \mathcal{N}_1^2}{2 \mathbf{F}(\partial \mathcal{N}_1, s_1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_M^{M_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{N}}{\mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)} \right]^2 \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial \mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial \mathbf{F}(\partial \mathcal{N}, s)}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dl} \right] dl \right\} \Omega \delta l.$$

La condition (23) devient donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} + P_1 \\ + \int_{\mathfrak{M}}^{\mathfrak{M}_1} \left( \left\{ \rho(s) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2} \right\} \frac{dx_2}{dl} \right. \\ \left. + \left\{ \rho(s) \frac{\partial V}{\partial y_2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2} \right\} \frac{dy_2}{dl} \right. \\ \left. + \left\{ \rho(s) \frac{\partial V}{\partial z_2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2} \right\} \frac{dz_2}{dl} \right) dl \geq 0, \end{aligned}$$

ou bien, d'après l'égalité (24),

$$(27) \quad P_1 + \Pi_1 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} \geq \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}.$$

L'égalité (26) permet de transformer cette inégalité en

$$(28) \quad K \geq \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}.$$

*La constante K ne peut être inférieure à la plus grande des valeurs prises, à l'intérieur de la masse fluide, par la quantité  $\Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}$ .*

Si nous supposons le point M infiniment voisin du point M<sub>1</sub>, l'inégalité (27) devient

$$(29) \quad P_1 \geq 0$$

et nous fournit le théorème suivant :

*Si la pression n'est pas nulle en un point de la surface déformable du fluide, elle est positive, c'est-à-dire dirigée vers l'intérieur du fluide.*

L'inégalité (28) peut s'énoncer autrement. A chaque point M intérieur au fluide correspond une quantité *p* déterminée par l'égalité

$$(30) \quad p = K - \Pi + \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}.$$

*Sans attacher à cette quantité aucun sens mécanique particulier, nous l'appellerons pression au point M intérieur au fluide aimanté.*

L'inégalité (28) fournit alors l'énoncé suivant :

*La pression à l'intérieur d'un fluide aimanté n'est jamais une quantité négative.*

§ IV. — Conditions d'équilibre d'une dissolution magnétique (suite).  
Variations de la concentration.

Les conditions d'équilibre obtenues jusqu'ici résultent de l'examen de modifications virtuelles dans lesquelles la concentration de chaque élément de volume de la dissolution a été maintenue invariable; ces conditions s'imposent donc même à un liquide dont chaque élément aurait une constitution invariable : ce sont à proprement parler les conditions *hydrostatiques* de l'équilibre de la dissolution.

Nous allons maintenant examiner une modification dans laquelle la concentration des diverses parties du liquide ne soit pas maintenue invariable; l'étude de cette modification nous fournira de nouvelles conditions d'équilibre.

Considérons une déformation renversable quelconque de la dissolution, déformation accompagnée de variations quelconques dans la concentration des différentes parties. On doit avoir, d'après les égalités (10) et (14),

$$A + B + C - d\mathfrak{E}'_e - d\mathfrak{E}''_e = 0.$$

Si l'on tient compte des égalités (12), (13), (16), (17) et (22) d'une part, et de la condition (24) d'autre part, cette égalité devient

$$\begin{aligned} & \int \left[ \frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V \frac{d\rho(s)}{ds} \right] \delta s \, dv_2 \\ & + \int \left[ \frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V \frac{d\rho(s)}{ds} \right] \left( \frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v + \frac{\partial s}{\partial z} w \right) dv_2 \\ & + \int \left[ \Phi(s) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) + V \rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} \right] \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & - \int P [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \, d\omega \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \, d\omega \\ & + \int \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} u + \frac{\partial \Pi}{\partial y} v + \frac{\partial \Pi}{\partial z} w \right) dv_2 = 0. \end{aligned}$$

Une intégration par parties, jointe à cette remarque que

$$P + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}$$

a la même valeur  $K$  en tout point de la surface déformable du fluide, permet d'écrire cette égalité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int \left[ \frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V \frac{d\rho(s)}{ds} \right] \left( \partial s + \frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v + \frac{\partial s}{\partial z} w \right) dv_1 \\ & + \int \left[ \Phi(s) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) + V\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \Pi \right] \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) dv_2 \\ & - K \int [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\omega = 0. \end{aligned}$$

Mais, d'autre part,

$$\begin{aligned} & \int [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] d\omega \\ & = - \int \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) dv_1. \end{aligned}$$

L'égalité précédente devient donc

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \left[ \frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V \frac{d\rho(s)}{ds} \right] \left( \partial s + \frac{\partial s}{\partial x_1} u + \frac{\partial s}{\partial y_1} v + \frac{\partial s}{\partial z_1} w \right) dv_1 \\ & + \int \left[ \Phi(s) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) + V\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \Pi + K \right] \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) dv_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'élément  $dv_2$ , dont un point a pour coordonnées  $x_2, y_2, z_2$ , au début de la modification, renferme, au début de cette modification, une masse de dissolvant

$$d\mu = \frac{1}{1+s} \rho(s) dv_1.$$

L'élément qui renferme la même masse  $d\mu$  de dissolvant a, à la fin de la modification, un volume  $(dv_2 + \delta dv_2)$ ; le point de cet élément, qui avait pour coordonnées  $x_2, y_2, z_2$ , a maintenant pour coordonnées  $x_2 + u, y_2 + v, z_2 + w$ . La concentration de la dissolution que renferme cet élément a augmenté de

$$\partial s + \frac{\partial s}{\partial x_1} u + \frac{\partial s}{\partial y_1} v + \frac{\partial s}{\partial z_1} w.$$

La masse de dissolvant que renferme cet élément étant demeurée invariable, on doit avoir

$$(32) \quad \frac{d}{ds} \left[ \frac{\rho(s)}{1+s} \right] \left( \delta s + \frac{\partial s}{\partial x_1} u + \frac{\partial s}{\partial y_1} v + \frac{\partial s}{\partial z_1} w \right) dv_1 + \frac{\rho(s)}{1+s} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) dv_1 = 0,$$

ce qui donne à la relation (33) la forme

$$(33) \quad \left\{ \int \left\{ \frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, s)}{\partial s} + V \frac{d\rho(s)}{ds} - \frac{d}{ds} \log \frac{\rho(s)}{1+s} \left[ \Phi(s) + \mathcal{F}(\mathcal{M}, s) + V\rho(s) - \frac{\mathcal{M}^2}{2F(\mathcal{M}, s)} - \Pi + K \right] \right\} \Delta s dv_1 = 0, \right.$$

en désignant, pour abréger, par  $\Delta s$  la quantité

$$\delta s + \frac{\partial s}{\partial x_1} u + \frac{\partial s}{\partial y_1} v + \frac{\partial s}{\partial z_1} w.$$

L'égalité (32) entraîne cette conséquence, à laquelle la modification considérée doit nécessairement satisfaire, que la masse du dissolvant doit demeurer invariable. Il doit en être de même de la masse du sel dissous, ou, en d'autres termes, de la masse totale de la dissolution.

Celle-ci a pour valeur

$$\int \rho(s) dv_1.$$

On doit donc avoir

$$\int \frac{d\rho(s)}{ds} \left[ \delta s + \frac{\partial s}{\partial x_1} u + \frac{\partial s}{\partial y_1} v + \frac{\partial s}{\partial z_1} w \right] dv_1 + \int \rho(s) \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) dv_1 = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (32),

$$(34) \quad \int \left[ \frac{d\rho(s)}{ds} - (1+s) \frac{d}{ds} \frac{\rho(s)}{1+s} \right] \Delta s dv_1 = 0.$$

L'égalité (33) doit avoir lieu, non pas quelles que soient les quantités  $\Delta s$ , mais pour tous les systèmes de valeurs de  $\Delta s$  qui vérifient l'égalité (34). Dès lors, d'après un principe connu du calcul des va-

riations, il doit exister une constante  $\lambda$ , telle que l'on ait

$$\int \left\{ \frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{N}, s)}{\partial s} + V \frac{d\rho(s)}{ds} - \frac{d}{ds} \log \frac{\rho(s)}{1+s} \left[ \Phi(s) + \mathcal{F}(\mathcal{N}, s) + V\rho(s) - \frac{\mathcal{N}^2}{2F(\mathcal{N}, s)} - \Pi + K \right] \right\} \Delta s dv_2 - \lambda \int \left[ \frac{d\rho(s)}{ds} - (1+s) \frac{d}{ds} \frac{\rho(s)}{1+s} \right] \Delta s dv_2 = 0.$$

quelles que soient les quantités  $\Delta s$ .

En d'autres termes, il existe une constante  $\lambda$ , telle que l'on ait, en tout point de la dissolution,

$$\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{N}, s)}{\partial s} + (V - \lambda) \frac{d\rho(s)}{ds} - \frac{d}{ds} \log \frac{\rho(s)}{1+s} \left[ \Phi(s) + \mathcal{F}(\mathcal{N}, s) + (V - \lambda)\rho(s) - \frac{\mathcal{N}^2}{2F(\mathcal{N}, s)} - \Pi + K \right] = 0.$$

Désignons par  $\nu(s)$  le volume spécifique de la dissolution de concentration  $s$ . Nous aurons

$$\begin{aligned} \rho(s) &= \frac{1}{\nu(s)}, \\ \frac{d\rho(s)}{ds} &= - \frac{1}{[\nu(s)]^2} \frac{d\nu(s)}{ds}, \\ - \frac{d}{ds} \log \frac{\rho(s)}{1+s} &= \frac{d}{ds} \log [(1+s)\nu(s)], \end{aligned}$$

et l'égalité précédente s'écrira

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \{ (1+s) [\Phi(s) + \mathcal{F}(\mathcal{N}, s)] \nu(s) \} \\ + \frac{d}{ds} [(1+s)\nu(s)] \left[ K - \Pi - \frac{\mathcal{N}^2}{2F(\mathcal{N}, s)} \right] + V - \lambda = 0. \end{cases}$$

Cette égalité peut encore se transformer.

Désignons par  $p$ , comme dans l'égalité (30), la quantité

$$K - \Pi + \frac{\mathcal{N}^2}{2F(\mathcal{N}, s)};$$

posons, en outre,

$$\varphi(s, p) = [\Phi(s) + p] \nu(s).$$

La quantité  $\varphi(s, p)$  ainsi déterminée sera *le potentiel thermodynamique de l'unité de masse d'une dissolution homogène, de concentration  $s$ , soumise à la pression uniforme et constante  $p$ .*

L'égalité (35) pourra alors s'écrire

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} [(1+s) \varphi(s, p)] + \frac{\partial}{\partial s} [(1+s) \mathfrak{F}(\mathfrak{N}, s) v(s)] \\ & - \frac{\mathfrak{N}^2}{F(\mathfrak{N}, s)} \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)] + V - \lambda = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour faire disparaître la constante  $\lambda$ , prenons la différentielle totale des deux membres de cette équation. Nous aurons

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, p)] ds + \frac{\partial^2}{\partial s \partial p} [(1+s) \varphi(s, p)] dp \\ & + d \frac{\partial}{\partial s} [(1+s) \mathfrak{F}(\mathfrak{N}, s) v(s)] - d \left\{ \frac{\mathfrak{N}^2}{F(\mathfrak{N}, s)} \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)] \right\} + dV = 0 \end{aligned} \right.$$

Une propriété connue du potentiel thermodynamique donne

$$\frac{\partial}{\partial p} \varphi(s, p) = v(s).$$

D'ailleurs, on déduit de l'égalité (30)

$$dp = -d\Pi + \frac{1}{2} d \frac{\mathfrak{N}^2}{F(\mathfrak{N}, s)}$$

ou bien, en tenant compte de l'égalité (24),

$$\begin{aligned} dp &= -\frac{1}{v(s)} dV + \frac{1}{2} d \frac{\mathfrak{N}^2}{F(\mathfrak{N}, s)} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{F(\mathfrak{N}, s)} \right]^2 dF(\mathfrak{N}, s), \\ &= -\frac{1}{v(s)} dV + d \frac{\mathfrak{N}^2}{F(\mathfrak{N}, s)} - \frac{\mathfrak{N}}{F(\mathfrak{N}, s)} d\mathfrak{N}. \end{aligned}$$

De là, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s \partial p} [(1+s) \varphi(s, p)] dp &= -\frac{1}{v(s)} \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)] dV \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} \left\{ (1+s) v(s) \left[ d \frac{\mathfrak{N}^2}{F(\mathfrak{N}, s)} - \frac{\mathfrak{N}}{F(\mathfrak{N}, s)} d\mathfrak{N} \right] \right\}, \end{aligned}$$

si l'on observe que, d'après l'égalité (2),

$$\frac{\pi}{F(\pi, s)} = \frac{\partial \mathcal{F}(\pi, s)}{\partial \pi},$$

et que, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (1+s) v(s) \frac{\pi}{F(\pi, s)} \right] d\pi = \frac{\partial^2}{\partial s \partial \pi} \left[ (1+s) \mathcal{F}(\pi, s) v(s) \right] d\pi,$$

on voit que l'égalité (37) se réduira à la forme suivante :

$$(38) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, p)] ds - (1+s) \frac{d}{ds} \log v(s) dV \\ & + \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \mathcal{F}(\pi, s) v(s)] ds - \frac{\pi^2}{F(\pi, s)} \frac{d^2}{ds^2} (1+s) v(s) ds \\ & + (1+s) v(s) \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\pi^2}{F(\pi, s)} ds + \frac{\partial^2}{\partial s \partial \pi} \frac{\pi^2}{F(\pi, s)} d\pi \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'égalité fondamentale qui lie les trois variations  $ds$ ,  $d\pi$ ,  $dV$  correspondant à un même déplacement infiniment petit ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) à l'intérieur du liquide.

#### § V. — Dissolution soustraite à l'action du magnétisme.

Voyons, en particulier, ce que devient cette relation dans le cas où la dissolution est soustraite à l'action de tout aimant permanent; dans ce cas, la dissolution se désaimante; on a

$$\pi = 0, \quad \mathcal{F}(\pi, s) = 0,$$

et l'égalité précédente devient

$$(39) \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, p)] ds = (1+s) \frac{d}{ds} \log v(s) dV.$$

Dans un travail précédent (1), nous avons appliqué la théorie du

---

(1) P. DUHEM, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions* (*Journal de Physique pure et appliquée*, 2<sup>e</sup> série, t. VII; 1888).



potentiel thermodynamique à l'étude de l'influence que la pesanteur exerce sur la concentration des dissolutions salines; cette question avait, auparavant, fait l'objet des travaux de MM. Gouy et Chaperon <sup>(1)</sup>. Les lois de la concentration des dissolutions par la pesanteur sont comprises dans une égalité fondamentale <sup>(2)</sup> qui n'est qu'une forme particulière de l'égalité (39).

La méthode suivie dans notre Mémoire, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions*, permet de discuter l'égalité (39). Cette méthode montre, en effet, que l'on a, en toutes circonstances,

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, p)] > 0.$$

Si la densité de la dissolution croît avec la concentration, on a

$$\frac{d}{ds} \log v(s) < 0;$$

si, au contraire, la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît, on a

$$\frac{d}{ds} \log v(s) > 0.$$

On arrive donc aux conclusions suivantes :

Si la densité de la dissolution croît avec la concentration, on a

$$\frac{ds}{dV} < 0;$$

si, au contraire, la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît, on a

$$\frac{ds}{dV} > 0.$$

(<sup>1</sup>) GOUY et G. CHAPERON, *L'équilibre osmotique et la concentration des dissolutions par la pesanteur* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CV, p. 117; 1887). — *Sur la concentration des dissolutions par la pesanteur* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. XII, p. 384; 1887). — *Sur l'équilibre osmotique* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. XIII, p. 120; 1888).

(<sup>2</sup>) *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions*, équation (32).

Ces inégalités peuvent s'énoncer de la manière suivante :

*Dans le cas où la densité d'une dissolution croît avec la concentration de cette dissolution, la concentration décroît d'un point à l'autre de la dissolution si la fonction potentielle des forces extérieures qui agissent sur la dissolution croît lorsqu'on passe du premier point au suivant. L'inverse a lieu dans le cas où la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît.*

On retrouve ainsi, sous une forme générale, les résultats dont MM. Gouy et Chaperon ont donné les premiers une démonstration théorique.

#### § VI. — Dissolution soumise à l'action d'aimants permanents.

Pour discuter les propriétés d'une dissolution soumise à l'action d'aimants permanents, il faut nécessairement particulariser la forme des fonctions  $\tilde{\mathfrak{F}}(\mathfrak{M}, s)$ ,  $F(\mathfrak{M}, s)$ . Nous admettrons qu'il s'agit de la dissolution d'un sel magnétique dans un liquide non magnétique, et que l'on a, comme aux égalités (4) et (7),

$$F(\mathfrak{M}, s) = Ks,$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\mathfrak{M}, s) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2Ks}.$$

Dans ces conditions, nous aurons les égalités suivantes

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \tilde{\mathfrak{F}}(\mathfrak{M}, s) v(s)] \\ &= \frac{\mathfrak{M}^2}{2K} \left\{ \frac{1}{s} \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] - \frac{2}{s^2} \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)] + \frac{2}{s^3} (1+s) v(s) \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] = \frac{\mathfrak{M}^2}{Ks} \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)],$$

$$(1+s) v(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} = \frac{2\mathfrak{M}^2}{Ks^3} (1+s) v(s),$$

$$(1+s) v(s) \frac{\partial^2}{\partial s \partial \mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} = - \frac{2\mathfrak{M}}{Ks^2} (1+s) v(s),$$

et l'égalité (38) deviendra, toute réduction faite,

$$(40) \int \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, p)] + \frac{\partial \pi^2}{K s^3} \right\} 3(1+s) v(s) + s \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)] - 2s^2 \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] \Bigg\} ds \\ - (1+s) \frac{d}{ds} \log v(s) dV - 2(1+s) v(s) \frac{\partial \pi}{K s^2} d\pi = 0.$$

Dans cette égalité, nous connaissons le signe de la quantité

$$- (1+s) \frac{d}{ds} \log v(s)$$

qui sert de coefficient à  $dV$ . Cette quantité est positive si la densité de la dissolution croît avec la concentration, et négative dans le cas contraire.

La quantité

$$- 2(1+s) v(s) \frac{\partial \pi}{K s^2},$$

qui sert de coefficient à  $d\pi$ , est essentiellement négative.

Le coefficient de  $ds$  renferme un terme, le terme en  $\frac{\partial \pi^2}{K s^3}$ , dont le signe est plus difficile à préciser d'une manière entièrement générale; toutefois, pour les concentrations très faibles, ce terme peut être réduit à

$$3(1+s) v(s) \frac{\partial \pi^2}{K s^3}$$

et est alors essentiellement positif. Il en est évidemment de même tant que la concentration ne surpasse pas une certaine limite au-dessous de laquelle nous la supposons toujours comprise. Dans ces conditions, le coefficient de  $ds$  est assurément positif.

Si donc nous écrivons  $ds$  sous la forme suivante

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial s}{\partial V} dV,$$

nous voyons que  $\frac{\partial s}{\partial \pi}$  est essentiellement positif, tandis que  $\frac{\partial s}{\partial V}$  est négatif si la densité de la dissolution croît avec la concentration, et po-

sitif si la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît.

*Supposons la dissolution soustraite à l'action des forces extérieures; dans ce cas, nous pourrions énoncer la proposition suivante :*

*Lorsqu'on soumet à l'action d'aimants permanents une dissolution d'un sel magnétique dans un dissolvant non magnétique, la concentration varie d'un point à l'autre de la dissolution; elle est d'autant plus forte en un point que l'aimantation est plus forte en ce point; les surfaces d'égale aimantation sont identiques aux surfaces d'égale concentration.*

Nous pouvons encore transformer l'égalité (40) d'une autre manière.

A la température absolue  $T$ , où nous supposons porté le système que nous étudions, une dissolution de concentration  $s$ , soustraite à l'action d'aimants permanents, émet de la vapeur d'eau et cette vapeur est saturée quand sa tension atteint une certaine valeur  $\varpi$ . Nous pouvons écrire

$$(1+s)\varphi(s, p) = (1+s)\varphi(s, \varpi) + (1+s) \int_{\varpi}^p \frac{\partial \varphi(s, p)}{\partial p} dp.$$

Si l'on observe que, conformément à une propriété déjà invoquée du potentiel thermodynamique, on a

$$\frac{\partial \varphi(s, p)}{\partial p} = v(s),$$

on voit que l'on peut écrire

$$(41) \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s)\varphi(s, p)] = \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s)\varphi(s, \varpi)] + \frac{d^2}{ds^2} [(1+s)v(s)](p - \varpi).$$

L'égalité (30) donne

$$p = K - \Pi + \frac{\partial \Pi^2}{2 F(\partial \Pi, s)}.$$

Considérons dans le fluide un certain point  $o$  où  $\Pi$  a la valeur  $\Pi_0$ ,  $s$  la valeur  $s_0$  et  $\pi$  la valeur  $\pi_0$ . Pour un point quelconque  $M$  du fluide, on aura

$$\Pi = \Pi_0 + \int_0^{\pi} d\Pi.$$

Si le point  $o$  est à la surface libre du fluide, on a, d'après l'égalité (26),

$$\Pi_0 = K - P_0 + \frac{\partial \Pi_0^2}{2 F(\partial \Pi_0, s_0)},$$

$P_0$  étant la pression extérieure au point  $o$ . L'égalité (24) donne d'ailleurs

$$d\Pi = \rho(s) dV + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} \right]^2 dF(\partial \Pi, s).$$

On a donc

$$(42) \quad p = P_0 + \frac{\partial \Pi^2}{2 F(\partial \Pi, s)} + \frac{\partial \Pi_0^2}{2 F(\partial \Pi_0, s_0)} - \int_0^M \frac{1}{v(s)} dV - \frac{1}{2} \int_0^M \left[ \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} \right]^2 dF(\partial \Pi, s).$$

Les égalités (41) et (42) donnent

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, p)] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, \varpi)] + \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] \left[ P_0 - \varpi + \frac{\partial \Pi^2}{F(\partial \Pi, s)} - \frac{\partial \Pi_0^2}{F(\partial \Pi_0, s_0)} \right. \\ & \quad \left. - \int_0^M \frac{1}{v(s)} dV - \int_0^M \frac{\partial \Pi}{F(\partial \Pi, s)} d\partial \Pi \right]. \end{aligned}$$

Reportons cette valeur dans l'égalité (40), après avoir remplacé  $F(\partial \Pi, s)$  par  $Ks$ , et nous arriverons à l'égalité suivante :

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, \varpi)] \right. \\ & \quad + \frac{\partial \Pi^2}{Ks^3} \left\{ 3(1+s) v(s) - s \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)] - s^2 \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] \right\} \\ & \quad + \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] \left[ P_0 - \varpi - \frac{\partial \Pi_0^2}{Ks_0} - \int_0^M \frac{1}{v(s)} dV - \int_0^M \frac{\partial \Pi}{Ks} d\partial \Pi \right] \Big) ds \\ & \quad \left. - (1+s) \frac{d}{ds} \log v(s) dV - 2(1+s) v(s) \frac{\partial \Pi}{Ks^2} d\partial \Pi = 0. \right\} \end{aligned}$$

Soit  $J$  l'intensité du champ créé par les aimants permanents. Au degré d'approximation adopté en écrivant les équations (5), on a

$$\begin{aligned} \partial \Pi^2 &= K^2 s^2 J^2, \\ \partial \Pi d\partial \Pi &= K^2 (s^2 J dJ + J^2 s ds). \end{aligned}$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (43) devient

$$(44) \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, \varpi)] \right. \\ & + \frac{kJ^2}{s} \left\{ (1+s) v(s) - s \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)] - s^2 \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] \right\} \\ & + \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] \left[ P_0 - \varpi - K s_0 J_0 - \int_0^M \frac{1}{v(s)} dV - K \int_0^M (sJ dJ + J^2 ds) \right] \Big) ds \\ & \left. - (1+s) \frac{d}{ds} \log v(s) dV - 2(1+s) v(s) KJ dJ = 0. \right\} \end{aligned}$$

Faisons enfin subir à cette égalité une dernière transformation.

A la température T, que nous considérons, sous la pression  $\varpi$ , l'unité de masse de vapeur d'eau a un volume  $U(\varpi)$ .

D'après des relations que nous avons démontrées autre part (1), on a

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} [(1+s) \varphi(s, \varpi)] = - \frac{1}{s} \left[ U(\varpi) - v(s) + s(1+s) \frac{dv(s)}{ds} \right] \frac{d\varpi}{ds}.$$

Cette relation transforme l'égalité (44) en la suivante :

$$(45) \left\{ \begin{aligned} & \left( U(\varpi) \frac{d\varpi}{ds} - \left[ v(s) - s(1+s) \frac{dv(s)}{ds} \right] \frac{d\varpi}{ds} \right. \\ & - KJ^2 \left\{ (1+s) v(s) - s \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)] - s^2 \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] \right\} \\ & - s \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)] \left[ P_0 - \varpi - KJ s_0^2 - \int_0^M \frac{dV}{v(s)} - K \int_0^M (sJ dJ + J^2 ds) \right] \Big) ds \\ & \left. + s(1+s) \frac{d}{ds} \log v(s) dV + 2s(1+s) v(s) KJ dJ = 0. \right\} \end{aligned}$$

*Aux températures ordinaires*, le volume spécifique  $v(s)$  de la dissolution est très petit en comparaison du volume spécifique  $U(\varpi)$  de la vapeur saturée. On peut négliger le premier en présence du second. On peut de même négliger, en présence de  $U(\varpi)$ , les quantités

$$\begin{aligned} & s \frac{d}{ds} [(1+s) v(s)], \quad s \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)], \\ & s^2 \frac{d^2}{ds^2} [(1+s) v(s)], \quad v(s) - s(1+s) \frac{dv(s)}{ds}. \end{aligned}$$

(1) P. DUHEM, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions* [égalités (38) et (47)]. (*Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. VII; 1888.)

On peut donc réduire approximativement l'égalité (45) à la forme suivante :

$$(46) \quad U(\varpi) \frac{d\varpi}{ds} + s(1+s) \frac{d \log v(s)}{ds} dV + 2s(1+s) v(s) KJ dJ = 0.$$

Les lois de Mariotte et de Gay-Lussac peuvent être appliquées à la vapeur d'eau au degré d'approximation dont nous nous contentons ici ; si donc nous désignons par  $\psi$  le poids moléculaire de l'eau, par  $R$  une constante qui est la même pour tous les gaz, nous aurons

$$U(\varpi) = \frac{RT}{\psi \varpi},$$

et l'égalité (46) deviendra

$$(47) \quad \frac{RT}{\psi} \frac{d}{ds} \log \varpi ds + s(1+s) \frac{d \log v(s)}{ds} dV + 2s(1+s) v(s) KJ dJ = 0.$$

Toutes les quantités qui figurent dans cette égalité (47) sont des quantités mesurables.

Supposons que les seules forces extérieures auxquelles la dissolution est soumise soient les actions de la pesanteur ; nous aurons alors

$$V = gz,$$

en désignant par  $g$  l'intensité de la pesanteur, et par  $z$  la cote du point considéré au-dessus d'un plan horizontal arbitraire.

Étudions les variations de la concentration aux divers points d'un plan horizontal tracé à l'intérieur de la dissolution. Ces variations seront données par l'égalité

$$\frac{RT}{\psi} \frac{d}{ds} \log \varpi ds + s(1+s) v(s) K d(J^2) = 0.$$

Les points où la concentration a une même valeur formeront, sur le plan horizontal en question, une ligne le long de laquelle l'intensité du champ aura aussi une valeur constante. Ainsi, *sur un plan horizontal, les lignes d'égale concentration marquent l'intersection de ce plan par les surfaces isodynamiques du champ. La concentration croît avec l'intensité du champ.*

Si l'on place sur les pôles d'un aimant une cuve plate remplie d'une dissolution d'un sel magnétique coloré, on pourra, par les variations

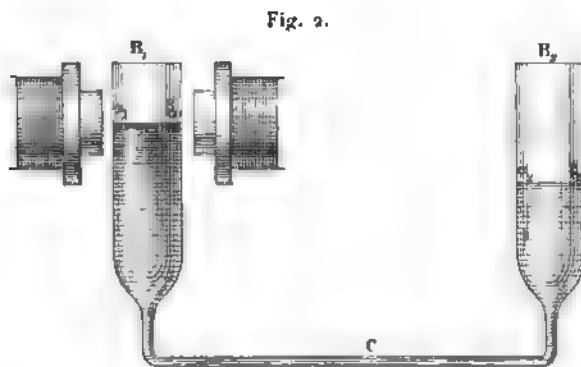
de la teinte, se rendre compte des variations de la concentration. Les lignes d'égale teinte dessineront l'intersection du fond de la cuve avec les surfaces isodynamiques.

C'est à cet ordre de phénomènes que l'on doit rattacher quelques observations de M. Colardeau <sup>(1)</sup>. Ces phénomènes jouent certainement un rôle dans l'explication des faits curieux observés par M. Ira Remsen, faits qui ne paraissent pas devoir s'expliquer uniquement par les raisons que nous avons données dans notre *Théorie de l'aimantation par influence*.

#### § VII. — Quelques conséquences expérimentales.

La théorie précédente conduit à quelques conséquences qui ont une certaine importance au point de vue de la Physique expérimentale et que nous nous proposons de mettre en évidence dans ce dernier paragraphe.

Imaginons un vase formé de deux branches verticales  $B_1$ ,  $B_2$  (*fig. 2*), reliées l'une à l'autre par un tube de communication horizontal  $C$ .



La branche  $B_1$  est placée entre les deux pôles d'un électro-aimant puissant, tandis que la branche  $B_2$ , fort éloignée de ces deux pôles, se trouve dans une région où le champ magnétique a une intensité négligeable.

---

<sup>(1)</sup> E. COLARDEAU, *Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. VI; 1887.



Le tube est rempli d'une dissolution formée par un sel magnétique ; cette dissolution est soumise à la pression atmosphérique. D'après ce qui précède, elle sera plus concentrée dans la branche  $B_1$  que dans la branche  $B_2$ . Le niveau ne sera pas forcément le même dans la branche  $B_1$  que dans la branche  $B_2$ .

Soient

$\alpha_1, \beta_1$ , le niveau du liquide dans la branche  $B_1$  ;

$\alpha_2, \beta_2$ , le niveau du liquide dans la branche  $B_2$  ;

$Z_1$ , la distance du premier niveau à un plan horizontal arbitraire ;

$Z_2$ , la distance du second niveau à ce même plan horizontal ;

$s_1$ , la concentration au premier niveau ;

$s_2$ , la concentration au second niveau ;

$\mathfrak{M}$ , l'intensité de l'aimantation en un point du premier niveau ;

$P$  la pression extérieure.

Supposons que la force extérieure appliquée aux éléments du liquide soit la pesanteur, dont l'intensité est  $g$ .

Soient  $m_1$  un point du premier niveau, et  $m_2$  un point du second ; relions ces deux points par un chemin  $m_2 m_1$ , situé en entier au sein de la dissolution.

L'égalité (26), appliquée au point  $m_1$ , donne

$$P + \Pi_1 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = K.$$

La même égalité, appliquée au point  $m_2$ , donne

$$P + \Pi_2 = K.$$

On a donc

$$\Pi_1 - \Pi_2 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = 0$$

ou

$$\int_{m_2}^{m_1} d\Pi - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = 0.$$

D'autre part, l'égalité (24) donne

$$d\Pi = \frac{1}{v(s)} dV + \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 dF(\mathfrak{M}, s).$$

On a donc

$$\int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{v(s)} dV + \frac{1}{2} \int_{m_1}^{m_2} \left[ \frac{\partial \pi}{F(\partial \pi, s)} \right]^2 dF(\partial \pi, s) - \frac{\partial \pi_1^2}{2 F(\partial \pi_1, s_1)} = 0.$$

Une intégration par parties transforme cette égalité en

$$(48) \quad \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{v(s)} dV = \frac{1}{2} \int_{m_1}^{m_2} F(\partial \pi, s) d \left[ \frac{\partial \pi}{F(\partial \pi, s)} \right]^2.$$

Dans le cas où, comme nous l'avons supposé, les seules forces agissantes sont la pesanteur, cette égalité devient

$$(49) \quad g \int_{m_1}^{m_2} \frac{dz}{v(s)} = \frac{1}{2} \int_{m_1}^{m_2} F(\partial \pi, s) d \left[ \frac{\partial \pi}{F(\partial \pi, s)} \right]^2.$$

Au degré d'approximation employé dans les formules précédentes, on a

$$\begin{aligned} F(\partial \pi, s) &= Ks, \\ \frac{\partial \pi^2}{[F(\partial \pi, s)]^2} &= J^2. \end{aligned}$$

L'égalité (49) devient alors

$$(50) \quad g \int_{m_1}^{m_2} \frac{dz}{v(s)} = \frac{K}{2} \int_{m_1}^{m_2} s dJ^2.$$

Cette égalité peut encore se transformer par une nouvelle approximation. Soit

$$\Sigma = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

la concentration moyenne dans l'appareil. Si les différences de concentration sont faibles entre les deux branches, on pourra remplacer l'égalité précédente par

$$(51) \quad \frac{g}{v(\Sigma)} (Z_1 - Z_2) = \frac{K \Sigma}{2} J_1^2,$$

Cette égalité nous montre que *le liquide sera plus élevé dans la branche B<sub>1</sub> que dans la branche B<sub>2</sub>; la mesure de la dénivellation, jointe à la mesure du champ magnétique, conduit à une détermination approchée de la constante K, semblable à celle que Quincke a employée pour déterminer le coefficient d'aimantation des liquides homogènes.*

L'égalité (47) peut s'écrire

$$(52) \quad \frac{RT}{2\psi} \frac{1}{(1+s)\nu(s)} \frac{d}{ds} \log \varpi ds - \frac{s}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{\nu(s)} dV + \frac{K}{2} s dJ^2 = 0.$$

Elle peut aussi s'écrire

$$(53) \quad \frac{RT}{\psi} \frac{1}{s(1+s)} \frac{d}{ds} \frac{1}{\nu(s)} \frac{d}{ds} \log \varpi ds + \frac{dV}{\nu(s)} + \frac{K}{\frac{d}{ds} \log \nu(s)} dJ^2 = 0.$$

Remplaçons  $dV$  par  $g dz$ .

Comparons les égalités (50) et (52); nous trouverons

$$(54) \quad \frac{RT}{2\psi} \int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{(1+s)\nu(s)} \frac{d}{ds} \log \varpi ds = -g \int_{m_1}^{m_2} \left[ \frac{1}{\nu(s)} - \frac{s}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{\nu(s)} \right] dz.$$

Si la concentration diffère peu dans les deux branches, cette égalité pourra s'écrire approximativement

$$(55) \quad \frac{RT}{2\psi} \frac{1}{(1+\Sigma)\nu(\Sigma)} \log \left( \frac{\varpi_2}{\varpi_1} \right) = g \left[ \frac{1}{\nu(\Sigma)} - \frac{\Sigma}{2} \frac{d}{d\Sigma} \frac{1}{\nu(\Sigma)} \right] (Z_1 - Z_2),$$

*relation simple et facile à vérifier par l'expérience entre la différence de niveau qui existe entre les deux branches de l'appareil et les tensions des vapeurs émises par les dissolutions que renferment ces deux branches.*

En comparant de même les égalités (50) et (53), on trouve

$$(56) \quad \frac{RT}{\psi} \int_{m_2}^{m_1} \frac{1}{s(1+s)} \frac{d}{ds} \frac{1}{\nu(s)} \frac{d}{ds} \log \varpi ds + \frac{K}{2} \int_{m_1}^{m_2} \left[ \frac{2\nu(s)}{d\nu(s)} + s \right] dJ^2 = 0.$$

Si la concentration diffère peu dans les deux branches, cette éga-

lité (56) peut s'écrire approximativement

$$(57) \quad \frac{RT}{\psi} \frac{1}{\Sigma(1+\Sigma)} \log\left(\frac{\varpi_2}{\varpi_1}\right) = \frac{K}{2} \left[ \Sigma \frac{d v(\Sigma)}{d \Sigma} + 2 v(\Sigma) \right] J_1^2,$$

égalité à laquelle on parviendrait d'ailleurs en comparant les égalités (51) et (55). Cette égalité (57) fournit une relation, susceptible d'être vérifiée par l'expérience, entre l'intensité du champ et les tensions des vapeurs émises par les dissolutions que renferment les deux branches.



---

SUR LE

## DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE INVARIABLE,

PAR M. G. DARBOUX (1).

---

Non seulement on a étudié d'une manière générale le mouvement d'une figure plane dans son plan, mais on a aussi considéré plusieurs espèces de mouvements particuliers dont les propriétés ont trouvé d'importantes applications dans la théorie des mécanismes. En ce qui concerne le mouvement d'une figure dans l'espace, la Géométrie est, il me semble, moins avancée; on possède, il est vrai, des propositions générales applicables à tout déplacement, mais on connaît peu de mouvements particuliers. Je demande à l'Académie la permission de lui faire connaître les résultats que j'ai obtenus sur ce sujet. Je commence par les mouvements à une variable indépendante, ceux dans lesquels les points décrivent des courbes trajectoires.

Il existe une infinité de mouvements dans lesquels tous les points de la figure mobile décrivent des courbes unicursales de degré donné. En laissant de côté la translation, le plus simple de ces mouvements est celui dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des coniques. Voici comment on peut le définir géométriquement.

Considérons un cylindre de révolution (C); il est clair qu'on peut le faire rouler intérieurement sur un cylindre de révolution (C') de rayon double, tout en le faisant glisser d'une quantité quelconque parallèlement aux génératrices rectilignes de (C'). Si l'on assujettit un point de (C) à décrire une droite qui rencontrera nécessairement l'axe

---

(1) Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCII, p. 118.

du cylindre ( $C'$ ), le mouvement du cylindre ( $C$ ) sera complètement défini et tout point invariablement lié à ce cylindre décrira une conique.

On voit qu'il sera très aisé, soit au moyen d'engrenages et de glissières, soit au moyen de tiges articulées, de réaliser un tel mouvement.

Ce mouvement est le plus général dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des ellipses. Je dis que, en excluant le cas d'un déplacement parallèle à un plan fixe, il est *le seul dans lequel tous les points de la figure mobile puissent décrire des courbes planes*.

En effet, supposons d'abord que tous les plans de l'espace soient décrits par un des points de la figure mobile. Alors, dans le mouvement inverse, c'est-à-dire dans le mouvement de la figure primitivement fixe par rapport à la figure mobile, tous les plans passeront par des points fixes. Il résulte de là qu'ils envelopperont nécessairement des cônes de révolution. En effet, soit  $(\pi)$  un plan,  $(\pi')$  un plan parallèle au premier. Le plan  $(\pi')$  passant par un point fixe, le plan parallèle  $(\pi)$  devra être tangent à une sphère fixe; comme il passe d'ailleurs par un point fixe, il enveloppera nécessairement un cône de révolution.

Si l'on s'appuie maintenant sur cette proposition presque évidente, *l'ordre des trajectoires des points dans un mouvement donné est égal à la classe des enveloppes des plans dans le mouvement inverse*, on verra tout de suite que, dans le mouvement primitif, les trajectoires de tous les points sont nécessairement des coniques.

Si, au contraire, les points de la figure mobile ne décrivent pas tous les plans de l'espace, les plans qui contiennent les trajectoires planes dépendront seulement d'un ou de deux paramètres variables, et, par conséquent, chacun d'eux contiendra plusieurs trajectoires planes. Une infinité de droites de la figure mobile seront ainsi assujetties à décrire des plans fixes; et, par conséquent, si par un point fixe  $O$  on mène des parallèles à chacune de ces droites dans une position déterminée de la figure mobile, on formera une figure invariable dont tous les points devront décrire des plans passant par  $O$ . L'analyse détaillée et facile de cette hypothèse conduit à la seule solution suivante: mouvement de la figure mobile parallèlement à un plan fixe. Et, en effet,

dans ce mouvement tous les points décrivent des courbes planes qui peuvent être de degré quelconque <sup>(1)</sup>.

Je laisse de côté quelques propositions relatives à différents mouvements dans lesquels les points de la figure mobile décrivent des cubiques gauches ou des courbes du quatrième ordre, pour arriver aux mouvements qui dépendent de deux paramètres et dans lesquels les points de la figure mobile décrivent des surfaces.

On sait que, dans le plan, il existe un mouvement dans lequel tous les points décrivent des ellipses. Il n'existe pas, dans l'espace, de mouvement dans lequel tous les points décrivent des surfaces du second degré. On sait que, dans certaines questions de Géométrie, pour étendre à l'espace des propriétés des coniques, il faut considérer non plus une surface du second ordre, mais la surface de Steiner. C'est ce qui se présente ici. *Il existe un mouvement d'une figure invariable dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des surfaces de Steiner. Dix points particuliers de la figure mobile décrivent des plans.*

Le mouvement le plus général de cette nature ne donne pour les surfaces trajectoires que des surfaces de Steiner, ou des plans pour les dix points dont il vient d'être question. Mais, dans certaines hypothèses particulières, il peut arriver que les points d'une droite, ou même les points de deux droites décrivent des ellipsoïdes. Dans ce dernier cas, si l'on fait intervenir les éléments imaginaires, il existe un tétraèdre ayant au plus deux arêtes réelles, qui donne lieu aux propriétés suivantes :

Tout point en dehors des faces décrit une surface de Steiner. Tout point sur une des faces en dehors des arêtes décrit une surface réglée du troisième ordre. Tout point sur une des arêtes décrit une surface du deuxième ordre ou un plan.

(1) M. Mannheim (*Bulletin de la Soc. etc. mathématique*, t. I, p. 106) a déjà démontré que, si quatre points d'une droite décrivent des courbes planes, tous les points de la droite décrivent des ellipses. Au sujet de ce mouvement particulier, on peut présenter la remarque suivante : si l'on considère une surface du second degré (Q) décrite par un point d'une droite (d), dont trois points déterminés sont dans les plans principaux de (Q), on peut transformer homographiquement la surface (Q) de telle manière que les transformées homographiques des diverses positions de la droite (d) deviennent les normales à la transformée de (Q). De là résultent de nombreuses conséquences, sur lesquelles je n'insiste pas en ce moment.

Lorsqu'on assujettit les quatre sommets d'un tétraèdre à décrire quatre plans fixes, le mouvement ainsi obtenu est unicursal. Les points de la figure mobile décrivent des surfaces du huitième ordre, admettant deux séries de sections coniques. Ces surfaces peuvent se décomposer exceptionnellement en deux surfaces de Steiner.

Lorsqu'on assujettit les cinq sommets d'un tétraèdre à décrire cinq plans fixes, les courbes trajectoires des différents points sont des courbes du huitième ordre et du genre elliptique.





---

SUR UNE

**CLASSE DE COURBES UNICURSALES**

ET SUR UNE

**PROPRIÉTÉ DU CERCLE,**

PAR M. G. DARBOUX (').

---

M. Laguerre a communiqué à l'Académie d'intéressantes propriétés de certaines courbes de quatrième classe, auxquelles il a donné le nom d'*hypercycles*. En 1879-80, M. Chasles avait bien voulu me confier son Cours de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences, et j'ai traité la théorie des imaginaires conformément aux vues introduites dans la Science par l'illustre géomètre. J'ai été ainsi amené à donner, au mois de janvier 1880, relativement à des courbes unicursales de toutes les classes, différentes propositions qui ont les rapports les plus étroits avec quelques-unes de celles qui ont été énoncées par M. Laguerre. Ce sont ces propositions que je demande à l'Académie la permission de lui communiquer.

Considérons d'abord  $n$  droites  $d_1, \dots, d_n$ . Si l'on marque sur ces droites des points  $O_1, \dots, O_n$  destinés à servir d'origine aux segments comptés sur ces droites, une droite variable  $\delta$  interceptera sur ces droites fixes des segments  $O_1A_1, \dots, O_nA_n$ . Cela posé, *si l'on assujettit ces  $n$  segments à satisfaire à la relation linéaire*

$$(1) \quad \sum \lambda_i \overline{O_i A_i} = K,$$

---

(1) Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCIV. p. 930 et 1108.

la droite  $\delta$  enveloppera une courbe de  $n^{\text{ième}}$  classe au plus, admettant une seule tangente parallèle à une droite donnée (<sup>1</sup>).

Réciproquement, toute courbe de  $n^{\text{ième}}$  classe admettant une seule tangente parallèle à une droite donnée, c'est-à-dire ayant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre  $n - 1$ , jouit de la propriété que chacune de ses tangentes intercepte sur  $n$  tangentes fixes des segments entre lesquels il existe une relation linéaire.

Dans le cas où  $n = 2$ , la courbe devient une parabole et l'on retrouve ainsi une propriété bien connue de cette courbe. La proposition précédente peut donc être considérée comme la généralisation et l'extension à toute une classe de courbes unicursales d'une des propriétés les plus essentielles de la parabole.

Mais, relativement à ses tangentes, la parabole jouit encore d'une autre propriété fondamentale : les deux segments interceptés par trois tangentes fixes sur une tangente variable ont un rapport constant. Cette propriété s'étend, elle aussi, à toutes nos courbes unicursales, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

*Pour toute courbe de  $n^{\text{ième}}$  classe, admettant une seule tangente parallèle à une droite donnée, il y a une relation linéaire et homogène entre les  $n$  segments interceptés sur une tangente variable par  $n + 1$  tangentes fixes.*

Réciproquement, si  $n + 1$  droites fixes interceptent sur une droite variable  $n$  segments entre lesquels a lieu une relation linéaire et homogène, la droite mobile enveloppe une courbe au plus de la  $n^{\text{ième}}$  classe, admettant une seule tangente parallèle à une droite donnée.

Il est clair que ces propositions comportent beaucoup de cas particuliers, et sont susceptibles d'applications diverses. Je me contenterai de faire remarquer ici qu'elles donnent une construction géométrique

(<sup>1</sup>) L'équation de la tangente à la courbe pourra se mettre sous la forme

$$(x - iy)u + (x + yi) = \frac{F(u)}{f(u)},$$

$u$  désignant un paramètre variable,  $F(u)$  et  $f(u)$  des polynômes respectivement de degrés  $n$  et  $n - 1$ .

très simple de la courbe de la classe  $n$  admettant la droite de l'infini comme tangente multiple d'ordre  $n-1$  et déterminée par  $2n$  tangentes.

En faisant la perspective, on obtiendra des propositions applicables à toute courbe de classe  $n$ , admettant une tangente multiple d'ordre  $n-1$ . Considérons une telle courbe et  $n$  tangentes fixes. Marquons sur chaque tangente un point  $O_i$  choisi arbitrairement; soient  $P_i$  le point où elle est coupée par la tangente multiple, et  $M_i$  le point où elle est coupée par une tangente variable. On aura la relation

$$(2) \quad \sum \alpha \frac{O_i M_i}{M_i P_i} = K$$

ou, plus simplement,

$$(3) \quad \sum_i^n \frac{\alpha'_i}{M_i P_i} = K'.$$

De même, si l'on considère  $n+1$  tangentes fixes et une tangente variable, on aura

$$(4) \quad \sum_i^{n+1} \lambda_i \frac{OM_i}{M_i P} = 0,$$

les  $\lambda$  étant des constantes liées par la relation

$$(5) \quad \sum \lambda_i = 0,$$

$O$  étant un point quelconque de la tangente variable et  $P$  le point où elle rencontre la tangente multiple. En vertu de l'équation (5), la relation (4) subsiste quand on déplace le point  $O$ , et peut d'ailleurs prendre la forme plus élégante

$$(6) \quad \sum_i^{n+1} \frac{\lambda_i}{M_i P} = 0.$$

Dans le cas où  $n=2$ , c'est-à-dire où l'on a une conique quelconque, la relation (4) devient

$$\lambda_1 \frac{OM_1}{M_1 P} + \lambda_2 \frac{OM_2}{M_2 P} + \lambda_3 \frac{OM_3}{M_3 P} = 0,$$

ou, en faisant coïncider le point O avec le point  $M_1$ ,

$$\lambda_2 \frac{M_1 M_2}{M_2 P} + \lambda_3 \frac{M_1 M_3}{M_3 P} = 0.$$

Cette égalité est la traduction de la proposition bien connue relative au rapport anharmonique des quatre points où une tangente variable est coupée par quatre tangentes fixes. Notre proposition générale, exprimée par l'équation (4), peut donc être considérée comme étendant à toutes les courbes de classe  $n$ , admettant une tangente multiple d'ordre  $n - 1$ , la propriété anharmonique des tangentes d'une conique.

Enfin, si l'on transforme par polaires réciproques, on obtient des théorèmes relatifs aux courbes d'ordre  $n$  ayant un point multiple d'ordre  $n - 1$ . Prenons sur une telle courbe  $n$  points  $A_i$ ; menons par chacun de ces points une droite quelconque  $A_i X_i$  et deux droites allant l'une au point multiple P de la courbe, l'autre à un point variable M. On aura la relation

$$\sum_1^n \alpha_i \frac{\sin \widehat{X_i A_i M}}{\sin \widehat{P A_i M}} = K$$

ou, plus simplement,

$$\sum_1^n \alpha'_i \cot \widehat{P A_i M} = K'.$$

Si l'on prend maintenant  $n + 1$  points fixes  $A_i$  et un point variable M, par lequel on mènera une droite quelconque MX, on aura

$$\sum_1^{n+1} \mu_i \frac{\sin \widehat{X M A_i}}{\sin \widehat{P M A_i}} = 0,$$

avec la condition

$$\sum \mu_i = 0,$$

qui permet de ramener l'équation précédente à la forme

$$\sum_1^{n+1} \mu_i \cot \widehat{P M A_i} = 0,$$

Toutes ces relations sont également la généralisation des propriétés anharmoniques du point dans les coniques.

Il me reste à faire connaître d'autres propriétés relatives à d'autres courbes unicursales qui admettent, en général, deux tangentes parallèles à une direction donnée. On sait que, si l'on considère deux tangentes fixes d'un cercle et une tangente variable, et si l'on attribue des sens convenables à ces trois droites, le périmètre du triangle qu'elles forment est constant. On peut énoncer cette proposition sous la forme suivante :

*Si une courbe est telle que sa tangente forme avec deux droites fixes un triangle de périmètre constant, elle jouit de la même propriété quand on substitue aux deux droites une infinité d'autres systèmes de deux droites fixes.*

Cette proposition admet la généralisation suivante :

*Si l'on considère  $n$  couples de droites et une droite variable qui forme, avec les  $n$  couples, des triangles dont les périmètres ont une somme constante, cette droite variable enveloppera une courbe unicursale, qui conservera la même définition quand on substituera aux couples primitifs  $n$  autres couples dépendant de deux paramètres arbitraires.*

Les courbes auxquelles on est ainsi conduit peuvent être caractérisées de la manière suivante : Elles sont d'une classe quelconque, que je désignerai par  $m$ ; elles admettent la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre  $m - 2$ , et de plus elles coupent cette droite aux points à l'infini sur le cercle. Exceptionnellement elles peuvent admettre la droite de l'infini comme tangente multiple d'ordre  $m - 1$ , et se réduire aux courbes considérées plus haut (').

(<sup>1</sup>) L'équation de la tangente à la courbe peut se mettre sous la forme

$$(x + iy)u^2 + (x - iy) = \frac{F(u)}{f_1(u)},$$

$F(u)$  et  $f_1(u)$  désignant des polynômes d'ordre  $m$  et  $m - 2$  respectivement

Réciproquement, chacune de ces courbes admettra la génération précédente; il faudra prendre  $n$  triangles si la courbe est de la classe  $2n$  ou  $2n - 1$ . Pour démontrer cette proposition, on est conduit à étudier la question suivante :

*Étant donnée une forme binaire homogène de degré pair  $2n$ , déterminer deux formes de degré  $n + 1$  dont elle soit la jacobienne.*

Ce problème, que j'avais proposé à mes auditeurs, a été l'objet des recherches profondes de l'un d'eux, M. Stéphanos, recherches qui ont été communiquées à l'Académie. Il offre un grand intérêt et se présente dans l'étude de questions très variées. Par exemple, c'est de sa solution que dépend la détermination des courbes unicursales d'un degré donné, dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

Si nous revenons à nos courbes unicursales, nous reconnaitrons qu'elles possèdent de nombreuses propriétés. D'abord, on peut généraliser beaucoup leur définition primitive. La courbe dont la tangente forme avec  $n$  couples de droites des triangles dont la somme des périmètres est constante peut encore être définie, et d'une infinité de manières, comme il suit :

*Il existe  $n$  couples de droites tels, que les  $n$  triangles formés par ces couples et la tangente variable aient leurs périmètres liés par une équation linéaire, dont les coefficients seront quelconques et ne seront plus égaux à l'unité comme dans la génération primitive.*

Si l'on veut avoir des sommes de périmètres, on peut encore augmenter le nombre des triangles, et l'on rencontre alors différents problèmes d'Algèbre, parmi lesquels je citerai le suivant, qui comprend celui qui a été énoncé plus haut :

*Étant donnée une forme binaire, trouver deux autres formes, de degrés égaux ou inégaux, dont elle soit la jacobienne.*

D'une manière générale, si l'on considère  $p$  droites fixes et une

droite variable, et si l'on établit une relation linéaire quelconque entre les segments interceptés par la droite variable sur les droites fixes, et par les droites fixes sur la droite variable, cette relation peut toujours se ramener à une autre ne contenant que des périmètres de triangles formés par la droite variable et les droites fixes; et par conséquent la courbe enveloppe de la droite appartient à la classe que nous étudions ici.

En me plaçant à ce point de vue, je signalerai spécialement les courbes qui sont définies par une relation existant uniquement entre les segments déterminés sur la tangente variable par des droites fixes. Si cette relation est homogène, ces courbes sont celles qui ont été considérées dans ma dernière Communication; si la relation n'est pas homogène, elle n'a lieu qu'avec un seul système de droites. La proposition suivante définit les cas dans lesquels elle se présente.

Considérons une courbe unicusale de classe  $n$ , admettant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre  $n - 2$ . En général, cette courbe, qui touche en  $n - 2$  points la droite de l'infini, la coupera en outre en deux autres points, distincts des points de contact. Si ces deux points viennent se confondre à la fois avec les points à l'infini sur le cercle et avec deux des  $n - 2$  points de contact, les  $n - 3$  segments interceptés sur la tangente variable à la courbe par les  $n - 2$  tangentes doubles de cette courbe seront liés par une relation linéaire.

Je n'insiste pas sur les divers cas particuliers, me contentant de faire remarquer que l'hypocycloïde à trois rebroussements, la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités dérivent deux droites et, plus généralement, l'hypercycle de M. Laguerre sont, avec la parabole, les plus simples des courbes dont j'ai fait connaître divers modes de génération <sup>(1)</sup>. Toutes ces courbes sont les

(1) Les propositions analogues relatives aux courbes sphériques ont déjà été données dans mon Ouvrage, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 106. On les obtient en appliquant la méthode des figures supplémentaires à d'autres propositions, sur lesquelles je ne reviendrai pas en ce moment; de même les propriétés de l'hypercycle peuvent se déduire de celles que nous devons à M. Laguerre, relativement aux courbes qu'il a nommées *cassinienues*.

polaires réciproques par rapport à un cercle de celles qui sont représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = f(\cos \omega, \sin \omega),$$

où  $f$  désigne une fraction rationnelle, ce qui explique comment leur étude conduit à différents problèmes relatifs à deux formes binaires ou à une fraction rationnelle.





---

SUR LES

COURBES ALGÈBRIQUES A TORSION CONSTANTE,

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, PROFESSEUR A SAINTE-BARBE.

---

Dans son Ouvrage sur la *Théorie des surfaces*, M. G. Darboux signale comme question intéressante la recherche des courbes algébriques à torsion constante. Quoique je n'aie pu parvenir à traiter complètement la question, en ce sens que je n'ai pu trouver un moyen de former les équations de *toutes ces courbes*, je suis cependant arrivé à certains résultats qui me paraissent présenter quelque intérêt. Je me propose d'établir les propositions suivantes :

1° Il existe une courbe, et une seule, dont le rayon de torsion est constamment égal à une constante donnée et telle que le cône formé par des parallèles aux binormales soit égal à un cône donné. Quand on connaît l'équation de ce cône, la détermination de la courbe à torsion constante ne dépend que de simples quadratures.

2° Pour que la courbe soit algébrique, il faut et il suffit : 1° que le cône parallèle aux binormales soit algébrique ; 2° que l'intersection de ce cône avec une sphère ayant son centre au sommet se projette sur *un plan quelconque* suivant une courbe algébriquement carrable, de sorte que la question se trouve ramenée à la recherche des courbes sphériques dont la projection sur un plan quelconque est algébriquement carrable.

3° La détermination d'une pareille courbe dépend de la détermination de deux fonctions algébriques d'une seule variable qui doivent vérifier une certaine équation différentielle, qui est du second ordre et

du second degré par rapport à l'une des fonctions et qui est une équation de Riccati par rapport à l'autre.

4° On peut trouver une infinité de courbes algébriques à torsion constante; en particulier, tout polynôme entier en fournira une.

1. Désignons par  $X, Y, Z, S$  les coordonnées d'un point et l'arc de la courbe; par  $x, y, z$  les cosinus directeurs de la binormale, et par  $T$  le rayon de torsion. Les cosinus directeurs de la tangente seront

$$\frac{dX}{dS}, \quad \frac{dY}{dS}, \quad \frac{dZ}{dS}$$

et ceux de la normale principale

$$y \frac{dZ}{dS} - z \frac{dY}{dS},$$

$$z \frac{dX}{dS} - x \frac{dZ}{dS},$$

$$x \frac{dY}{dS} - y \frac{dX}{dS}.$$

On aura donc, en vertu des formules de Frenet,

$$\frac{dx}{dS} = \frac{1}{T} \left( y \frac{dZ}{dS} - z \frac{dY}{dS} \right)$$

ou

$$dx = \frac{1}{T} (y dZ - z dY),$$

$$dy = \frac{1}{T} (z dX - x dZ),$$

$$dz = \frac{1}{T} (x dY - y dX),$$

d'où l'on tire

$$z dy - y dz = \frac{1}{T} [(y^2 + z^2) dX - xz dz - xy dY].$$

Si l'on remarque que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{et} \quad x dX + y dY + z dZ = 0,$$

on aura

$$(1) \quad \begin{cases} dX = T(z dy - y dz), \\ dY = T(x dz - z dx), \\ dZ = T(y dx - x dy). \end{cases}$$

Si  $T$  est une constante donnée, et si  $x, y, z$  sont connues en fonction d'une variable quelconque, on obtiendra  $X, Y, Z$  par de simples quadratures. Les constantes introduites par l'intégration se rapportent à un transport parallèle des axes ou à une translation de la courbe. Il n'y a donc qu'une seule courbe répondant à la question.

Les conclusions précédentes, qui n'ont rien de nouveau, subsisteraient si  $T$ , au lieu d'être constant, était *donné en fonction de la même variable* que  $x, y, z$ .

2. Les trois cosinus directeurs  $x, y, z$  de la binormale sont liés par la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ils satisfont de plus à l'équation homogène

$$f(x, y, z) = 0$$

du cône parallèle aux binormales.

On peut donc les considérer comme les coordonnées d'un point de l'intersection de ce cône avec la sphère de rayon 1 décrite du sommet du cône comme centre, intersection qu'on appelle l'*indicatrice des binormales*.

Il est bien certain que l'indicatrice des binormales d'une courbe algébrique est elle-même algébrique.

De plus, en vertu des formules (1), où l'on suppose  $T$  constant, les coordonnées d'un point de la courbe cherchée sont au facteur constant près  $\frac{T}{2}$  les aires en coordonnées polaires des projections de cette indicatrice sur les trois plans coordonnés. Il est évident du reste qu'on peut modifier le rayon de la sphère, tout en conservant le cône, sans changer la nature algébrique des aires des projections. De plus, si l'on change la constante  $T$ , on obtient des courbes homothétiques. Donc, à chaque courbe sphérique dont les projections sur les plans coor-

*donnés et, par suite, sur un plan quelconque, seront algébriquement car-  
rables, correspondra une infinité de courbes algébriques à torsion con-  
stante, différant par la valeur de la torsion et homothétiques entre elles, et  
réciproquement.*

3. Si l'on prend pour coordonnées d'un point de la sphère deux variables qui restent constantes chacune sur l'une des génératrices imaginaires de la sphère, on pourra poser

$$x + iy = u(1 - z) = -v(1 + z),$$

$$x - iy = \frac{1}{u}(1 + z) = -\frac{1}{v}(1 - z),$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{1 - uv}{u - v}, \quad y = \frac{i(1 + uv)}{u - v}, \quad z = \frac{u + v}{u - v}$$

et ensuite

$$z dy - y dz = \frac{i(-du - dv + v^2 du + u^2 dv)}{(u - v)^2},$$

$$x dz - z dx = \frac{du + dv + v^2 du + u^2 dv}{(u - v)^2},$$

$$y dx - x dy = -\frac{2i(v du + u dv)}{(u - v)^2}.$$

Une courbe algébrique de la sphère sera définie par une équation algébrique entre  $u$  et  $v$ , ou bien par deux fonctions algébriques qui donneront  $u$  et  $v$  en fonction d'une troisième variable. D'après les conditions de notre problème, il faudra que les trois différentielles ci-dessus soient des différentielles algébriques de la même variable. Il en sera évidemment de même des deux combinaisons linéaires

$$x dz - z dx \pm i(z dy - y dz),$$

et réciproquement. Donc il faut et il suffit que les trois quantités

$$(2) \quad \frac{du + dv}{(u - v)^2}, \quad \frac{v^2 du + u^2 dv}{(u - v)^2}, \quad \frac{v du + u dv}{(u - v)^2}$$

soient des différentielles algébriques.

Nous remarquerons que

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-du + dv + v^2 du - u^2 dv}{(u-v)^2}, \\ dy &= \frac{i(-du + dv - v^2 du + u^2 dv)}{(u-v)^2}, \\ dz &= \frac{-2(v du - u dv)}{(u-v)^2} \end{aligned}$$

seront aussi des différentielles algébriques.

Il en sera de même de

$$\begin{aligned} dx + i dy &= \frac{2(v^2 du - u^2 dv)}{(u-v)^2}, \\ dx - i dy &= \frac{-2(du - dv)}{(u-v)^2}. \end{aligned}$$

En combinant linéairement ces trois différentielles avec les différentielles (2), on voit que les six quantités

$$\begin{aligned} \frac{du}{(u-v)^2}, \quad \frac{v du}{(u-v)^2}, \quad \frac{v^2 du}{(u-v)^2}, \\ \frac{dv}{(u-v)^2}, \quad \frac{u dv}{(u-v)^2}, \quad \frac{u^2 dv}{(u-v)^2} \end{aligned}$$

seront des différentielles algébriques. Réciproquement, il suffira que trois de ces quantités prises dans trois colonnes différentes soient des différentielles algébriques.

Nous poserons

$$(3) \quad \frac{dv}{(u-v)^2} = da,$$

et nous aurons à exprimer que

$$da, \quad u da, \quad u^2 da$$

sont des différentielles algébriques. On remarquera que, d'après les identités

$$\begin{aligned} \int u da &= au - \int a du, \\ \int u^2 da &= au^2 - 2 \int au du, \end{aligned}$$

on pourra remplacer  $u da$  et  $u^2 da$  par  $a du$  et  $au du$ , puisque  $a$  doit être une fonction algébrique.

Si de plus on pose

$$a du = db,$$

on a

$$au du = u db,$$

qu'on pourra de même remplacer par  $b du$ .

Soit donc

$$b du = dc,$$

d'où

$$b = \frac{dc}{du}.$$

On a

$$a = \frac{db}{du} = \frac{d^2 c}{du^2} = c''.$$

Ainsi la fonction  $a$  devra être la dérivée seconde d'une fonction algébrique de  $u$ . Si  $a$  est connu, la fonction  $v$  sera déterminée par l'équation différentielle (3); de sorte que la condition nécessaire et suffisante est que l'équation (3), qu'on peut écrire

$$\frac{dv}{du} = (u - v)^2 \frac{da}{du},$$

ou encore

$$v' = (u - v)^2 c'',$$

soit vérifiée par deux fonctions algébriques  $v$  et  $c$  de  $u$ .

Si l'on pose

$$u - v = \frac{1}{f},$$

l'équation précédente prend la forme

$$(4) \quad f' + f^2 = c''.$$

Si l'on peut trouver deux fonctions algébriques de  $u$  vérifiant cette équation, la courbe correspondante sera représentée par l'équation algébrique

$$u - v = \frac{1}{f}.$$

L'équation (4) est une équation de Riccati par rapport à  $f$ ; on peut la transformer de manière qu'elle ne renferme que la dérivée seconde de  $c$  au lieu de la dérivée tierce. Pour y arriver, on remarquera que  $f^2$  doit être une différentielle algébrique. Alors on posera  $f^2 = g'$ , et l'on aura, en intégrant et faisant passer la constante dans la fonction  $c''$ ,

$$f + g - c'' = 0 \quad \text{ou} \quad g + \sqrt{g'} - c'' = 0,$$

ou, en chassant le radical,

$$(5) \quad g' = (g - c'')^2.$$

Il est à remarquer que la fonction  $g$  qui figure dans cette équation n'est autre que la fonction

$$\int \frac{du}{(u-v)^2} = \int f^2 du.$$

4. Quoique l'équation (4) contienne une dérivée tierce, elle paraît cependant plus facile à appliquer que l'équation (5). Nous allons donner les expressions des coordonnées d'un point de la courbe au moyen des fonctions  $f$  et  $c$ . Si l'on voulait ces expressions au moyen des fonctions  $g$  et  $c$ , il suffirait de se rappeler l'équation

$$f + g - c'' = 0,$$

de sorte qu'il n'y aurait qu'à remplacer  $f$  par  $c'' - g$ .

On a

$$\int \frac{dv}{(u-v)^2} = a = c'',$$

$$\int \frac{du}{(u-v)^2} = \int f^2 du = \int (c'' - f') du = c'' - f,$$

$$\int \frac{u dv}{(u-v)^2} = \int u da = au - \int a du = uc'' - b = uc'' - c',$$

$$\int \frac{v du}{(u-v)^2} = \int \left(u - \frac{1}{f}\right) f^2 du = \int u f^2 du - \int f du$$

$$= \int uc'' du - \int u f' du - \int f du$$

$$= uc'' - \int c'' du - uf = uc'' - c' - uf,$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{u^2 dv}{(u-v)^2} &= \int u^2 da = au^2 - 2 \int au du = au^2 - 2 \int u db \\
&= au^2 - 2ub + 2 \int b du = u^2 c'' - 2uc' + 2c, \\
\int \frac{v^2 du}{(u-v)^2} &= \int \left(u - \frac{1}{f}\right)^2 f^2 du = \int u^2 f^2 du - 2 \int u f du + \int du \\
&= \int u^2 c'' du - \int u^2 f' du - 2 \int u f du + \int du \\
&= u^2 c'' - 2 \int u c'' du - u^2 f + u \\
&= u^2 c'' - 2uc' + 2c - u^2 f + u.
\end{aligned}$$

Si l'on transporte ces valeurs dans les expressions

$$\begin{aligned}
X &= T \int (z dy - y dz) = T i \int \frac{-du - dv + v^2 du + u^2 dv}{(u-v)^2}, \\
Y &= T \int (x dz - z dy) = T \int \frac{du + dv + v^2 du + u^2 dv}{(u-v)^2}, \\
Z &= T \int (y dx - x dy) = -2 T i \int \frac{v du + u dv}{(u-v)^2},
\end{aligned}$$

on aura les expressions de X, Y, Z en fonction de la variable  $u$

$$(6) \quad \begin{cases} X = T i [-(2c'' - f)(1 - u^2) - 4uc' + 4c + u], \\ Y = T [(2c'' - f)(1 + u^2) - 4uc' + 4c + u], \\ Z = -2 T i [(2c'' - f)u - 2c']. \end{cases}$$

5. Pour que la courbe soit réelle, il suffit évidemment que l'indicatrice des binormales le soit, c'est-à-dire que  $-\frac{1}{v}$  soit conjugué de  $u$ .

Or  $u$  et  $v$  sont liés par l'équation

$$u - v = \frac{1}{f}, \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{v} = \frac{f}{1 - uf}.$$

Il faudrait donc, pour trouver une courbe algébrique réelle à torsion constante, qu'on pût trouver deux fonctions algébriques de  $u$ ,  $f$  et  $c$  vérifiant l'équation (4) et telles que  $u$  et  $\frac{f}{1-uf}$  soient des fonctions conjuguées d'une même variable réelle.



Il y a une remarque à faire au sujet des constantes qui entrent dans la fonction  $c$ . L'indicatrice des binormales qui a pour équation

$$u - v = \frac{1}{f}$$

ne dépend pas de cette fonction  $c$ , de sorte qu'elle ne change pas quand on fait varier les constantes introduites par l'intégration de  $c'''$ . Comme à cette indicatrice ne correspond qu'une seule courbe ayant une torsion donnée, il s'ensuit que ces constantes n'ont d'autre effet que de faire varier la position de la courbe; c'est du reste ce qu'on pourrait vérifier directement sur les formules (6). Il en résulte que, lorsqu'on aura trouvé une fonction  $f$  vérifiant l'équation (4), on pourra choisir arbitrairement les trois constantes de  $c$ , qui est défini par sa dérivée tierce, sans changer la courbe correspondante.

6. Il est facile de trouver une infinité de fonctions vérifiant l'équation (4) : il faut et il suffit que  $f^2 + f'$  soit la différentielle tierce d'une fonction algébrique. C'est évidemment ce qui arrivera si  $f$  est un polynôme entier ou si  $f$  est une somme de termes en nombre fini de la forme

$$f = \sum A_n u^n,$$

la lettre  $n$  désignant un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, à condition toutefois qu'aucune valeur de  $n$  ne soit égale à  $-1$ ,  $-2$ ,  $-\frac{3}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ , et que la somme de deux valeurs différentes de  $n$  ne soit jamais égale à  $-1$ ,  $-2$  ou  $-3$ . Ces restrictions proviennent de ce qu'il ne doit pas y avoir dans  $f' + f^2$  de termes donnant des logarithmes dans l'une des trois intégrations successives. Elles ne sont cependant pas absolues, car il pourrait arriver que des termes à intégrale transcendante disparaissent en se trouvant répétés avec des signes contraires dans  $f'$  et dans  $f^2$ .

On peut encore prendre pour  $f$  une expression de la forme

$$f = (u - a)^n,$$

$n$  étant un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, différent de

$$-1, \quad -2, \quad -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{3}{2}.$$

7. *Exemples :*

$$1^{\circ} \quad f = 0, \quad c'' = 0, \quad c = 0.$$

L'équation de l'indicatrice des binormales est

$$u - v = \infty.$$

Les formules (6) donnent, en faisant  $T = 1$ ,

$$X = iu, \quad Y = -u, \quad Z = 0.$$

C'est l'une des droites isotropes du plan des  $XY$ .

$$2^{\circ} \quad f = \text{const.}, \quad c''' = f^2, \quad c = \frac{1}{6}f^2u^3.$$

L'équation de l'indicatrice des binormales est

$$u - v = \frac{1}{f},$$

d'où l'on tire

$$x - iy = \text{const.}$$

C'est donc une courbe plane, et, comme le plan

$$x - iy = 0$$

est tangent au cône asymptote de la sphère, cette courbe est une parabole. Les formules (6) donnent, en supprimant une constante  $f$ ,

$$X = i \left[ \frac{1}{6}f^2u^3 - fu^2 - (2f^2 - 1)u \right],$$

$$Y = - \frac{1}{6}f^2u^3 - fu^2 + (2f^2 + 1)u,$$

$$Z = 2ifu(1 - fu).$$

On reconnaît aisément que la courbure de cette courbe est aussi constante : c'est l'hélice algébrique imaginaire qui est connue depuis longtemps.



---

PRINCIPES GÉNÉRAUX  
D'UNE  
THÉORIE ÉLASTIQUE DE LA PLASTICITÉ  
ET DE LA  
FRAGILITÉ DES CORPS SOLIDES,

PAR M. M. BRILLOUIN,  
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

*Objet du travail.* — Dans la théorie ordinaire de l'élasticité limitée aux lois de Hooke, et développée surtout pour les solides isotropes, on ne rencontre naturellement que les phénomènes de déformation temporaire dans lesquels le corps solide déformé revient exactement à sa forme primitive dès que cesse l'application des forces. Un examen attentif de cette théorie permet pourtant de mettre en évidence des cas particuliers dans lesquels le retour à la forme primitive est incomplet, et qui présentent par conséquent des déformations progressives et permanentes. On peut aussi trouver des cas dans lesquels la déformation progressive entraîne la rupture, et en particulier indiquer pour les solides anisotropes quelles relations entre les vingt et un coefficients d'élasticité sont nécessaires pour qu'un plan d'orientation déterminée soit un plan de glissement sans rupture ou un plan de facile clivage. Enfin, passant à l'étude des corps isotropes, dans le cas général où les forces élastiques sont des fonctions non linéaires des déformations, on peut de même tirer de la connaissance de ces fonctions les conditions auxquelles les forces appliquées au corps commencent à produire une déformation progressive, au lieu d'un état d'équilibre déterminé, ou bien la rupture.

Dans ce premier et court Mémoire, je me bornerai à mettre le plus

nettement possible en évidence les idées générales. Un second Mémoire sera consacré aux clivages des cristaux; un troisième aux corps isotropes soumis à de grandes déformations.

Les indications historiques trouveront place dans les Mémoires spéciaux; elles se réduisent d'ailleurs à fort peu de chose. Le véritable point de départ de ces recherches est dans les remarques de Stokes sur l'impossibilité d'admettre un rapport fixe entre les deux coefficients d'élasticité des corps isotropes naturels, et sur le rôle que joue l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre dans notre distinction des corps en solides et liquides. Maxwell et Thomson, en particulier, ont souvent insisté sur l'importance de ces remarques, tant dans leurs livres que dans les articles de l'*Encyclopédie britannique*, et les conférences publiques. Peut-être semblera-t-il qu'il n'y ait ici presque rien de plus; cependant aucun d'eux, à ma connaissance, n'en a tiré l'ensemble de conséquences que j'ai indiquées plus haut, et, si je ne me trompe, c'est faute d'avoir énoncé une remarque d'ailleurs évidente dans le cas des fluides, et sur laquelle j'ai déjà eu l'occasion d'insister dans ce Recueil même (<sup>1</sup>), à propos d'une question que je traiterai prochainement par une voie nouvelle.

Cette remarque est la suivante :

*A un système de forces élastiques données ne correspond pas nécessairement une déformation unique et déterminée.*

Tels sont les fluides qui, soumis à une pression uniforme, occupent un volume déterminé en grandeur, mais dont la forme reste indéterminée.

*Il y a des corps qui sont incapables d'exercer sur d'autres certaines actions élastiques, et par conséquent de subir les réactions correspondantes. Si l'on réussit à donner aux divers points de ces corps un système de déplacements et de vitesses initiales qui, pour rester fini, exigerait le développement de pareilles forces, ces corps coulent ou se séparent.*

Tels sont toujours les fluides incapables de résister aux moindres

(<sup>1</sup>) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. IV, juillet 1887, p. 225 et 226, et Note à la fin du Volume.

actions tangentielle ou à des pressions normales différentes en différents sens.

Les deux points de vue sont ainsi indiqués : pour d'autres corps que les fluides, il faut rechercher les cas d'indétermination, moindre d'ailleurs, de la forme sous l'influence de forces déterminées; c'est le point de vue statique qui correspond à un équilibre indifférent si le corps est en repos, instable s'il y a des vitesses initiales. On peut aussi rechercher directement les cas d'équilibre instable, c'est le point de vue dynamique, et il importe de distinguer par un caractère simple les cas où cette instabilité a pour conséquence la rupture, de ceux où elle produit une déformation progressive sans rupture, au moins immédiate.

Ainsi l'hypothèse fondamentale est ici la même que dans la théorie ordinaire de l'élasticité :

*A une déformation homogène déterminée d'un corps correspond un système de forces élastiques unique, déterminé sans aucune ambiguïté. Mais la réciproque peut n'être pas vraie.*

Si le corps n'est pas en repos, les forces élastiques peuvent dépendre en outre des variations de la déformation avec le temps, mais je ne m'en occupe pas pour le moment. J'ai déjà indiqué et développé ailleurs <sup>(1)</sup> une hypothèse différente et moins simple, d'après laquelle toute déformation temporaire serait accompagnée d'une déformation permanente définie par le cycle de transformation; il ne m'est pas encore possible de dire dans quelle mesure cette ancienne hypothèse s'applique aux corps réels. Je pense que l'hypothèse que je développe actuellement contient une beaucoup plus grande part de vérité; mais je ne prétends pas la présenter comme absolument définitive ni surtout comme complète; et si, en continuant à y réfléchir, à comparer les conséquences de l'hypothèse avec les observations, je viens à imaginer des modifications utiles ou même d'autres hypothèses toutes différentes qui me paraissent contenir une autre part de vérité, je ne me ferai pas faute de les développer aussi. Sur ces sujets délicats, on ne

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 6, 13, 20 et 27 février 1888, et *Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, 4, VII (1888), p. 237, et t. VIII (1889), p. 169.

peut pas espérer atteindre la vérité par l'expérimentation pure ; la preuve en est faite surabondamment par le nombre prodigieux de Mémoires de mesures qui, chacun à son tour, obscurcissent davantage un sujet déjà peu clair. Des hypothèses, développées jusqu'au point où la comparaison avec les mesures anciennes devient possible, sont tout à fait nécessaires ; mais, loin de se borner à une seule hypothèse, il convient, pour n'être pas dupe, de chercher à faire une énumération aussi complète que possible de toutes celles que l'imagination humaine peut inventer, pour choisir ensuite l'hypothèse la plus compréhensive comme étant provisoirement la plus vraisemblable.

J'ose espérer pourtant que l'hypothèse actuelle aura besoin seulement d'être complétée pour tenir compte de la vitesse de déformation, mais subsistera dans ses traits généraux.

*Déformations en fonction des forces. Cas d'indétermination.* — Pour un corps isotrope, en admettant les lois de Hooke, on sait que les forces élastiques  $N$ ,  $T$  sont données en fonction des dilatations et des glissements  $D$ ,  $G$  par les relations

$$N_1 = \lambda(D_x + D_y + D_z) + 2\mu D_x, \quad T_1 = \mu G_x$$

qui sont, en général, résolubles par rapport aux déformations et donnent

$$G_x = \frac{T_1}{\mu},$$

$$D_x + D_y + D_z = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\lambda + 2\mu}, \quad D_x = \frac{N_1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\lambda + \lambda\mu}.$$

Un premier cas d'indétermination bien connu est celui des fluides

$$\mu = 0,$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0, \quad N_1 = N_2 = N_3 = \lambda(D_x + D_y + D_z),$$

$$D_x + D_y + D_z = \frac{N}{\lambda};$$

$$D_x - D_y, \quad D_x - D_z, \quad G_x, G_y, G_z \text{ indéterminés.}$$

Les six forces élastiques sont bien déterminées ; mais elles ne dépendent que d'une seule déformation, la dilatation cubique. Aussi ces six équations n'en fournissent qu'une seule, distincte pour le calcul des

six composantes de la déformation; cinq d'entre elles, les différences des dilatations linéaires et les glissements, restent indéterminées. Une déformation sans changement du volume total ne met en jeu aucune force élastique, ne change pas les valeurs des forces élastiques par unité de surface; une déformation sans changement du volume total est permanente. Les fluides sont en équilibre stable ( $\lambda > 0$ ) pour tout changement de volume, indifférent pour les déformations sans changement de volume. La connaissance des forces élastiques par unité de surface ne suffit pas pour définir le changement de forme du fluide: il y faut ajouter des relations géométriques avec les corps extérieurs qui exercent la pression, la forme du vase en un mot. D'ailleurs, quelle que soit la forme finale prise par un élément de volume primitivement cubique, l'isotropie du milieu n'est pas altérée, et il n'y a pas à s'en préoccuper pour l'étude des déformations ultérieures.

Toutes ces remarques, évidentes dans le cas des fluides, se retrouveront pour les solides plastiques.

Un second cas d'indétermination se présente si l'on a (\*)

$$\begin{aligned} 3\lambda + 2\mu &= 0, \\ N_1 + N_2 + N_3 &= 0, \quad N_1 = \lambda(D_y + D_z - 2D_x), \quad T_1 = -\frac{2}{3}\lambda G_x, \\ G_x &= -\frac{2}{3\lambda}T_1, \quad D_y - D_z = -\frac{N_2 - N_3}{3\lambda}, \\ D_x + D_y + D_z &\text{ indéterminé.} \end{aligned}$$

On peut donc imaginer un autre type de solide isotrope, incapable de supporter une pression normale *uniforme*, mais capable de résister à des forces tangentielles, ou à des forces normales inégales ayant une somme nulle. Les différences des dilatations linéaires deux à deux sont seules déterminées, ainsi que les glissements. Mais les valeurs absolues des dilatations linéaires, ainsi que la dilatation cubique, sont indéterminées. La contraction cubique uniforme d'un tel corps ne met en jeu aucune force élastique; un tel corps résiste à la déformation, mais non à la compression cubique uniforme. Tout système de déplacements qui détruit l'homogénéité de ce corps sans déformer aucun

(\*) Ce sont les relations proposées par Stokes pour le frottement des fluides, en fonction des vitesses de déformation.

élément de volume n'altère pas l'équilibre. Mais si l'on donne, en outre, aux différents points du corps un système de vitesses initiales qui ne produise que des dilatations cubiques, sans glissements (<sup>1</sup>).

(<sup>1</sup>) Par exemple, sans rotation autour de Oz, on peut poser

$$\begin{aligned}\psi &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &\quad - 3ax(y^2 + z^2) - b(y^2 + z^2) + cxy + fxz + gx + hy + kz, \\ u &= \psi_x = 3ax^2 + 2bx + c - 3a(y^2 + z^2) + cy + fz + g, \\ v &= -\psi_y = 6axy + 2by - ex - h, \\ w &= -\psi_z = 6axz + 2bz - fx - k, \\ \frac{1}{3}\theta &= u'_x = v'_y = w'_z = \psi''_{xx} = -\psi''_{yy} = -\psi''_{zz} = 6ax + 2b,\end{aligned}$$

et prendre  $u, v, w$ , soit comme des déplacements, soit comme des vitesses qui donnent lieu uniquement à des dilatations cubiques, croissant proportionnellement à  $x$ .

On peut trouver facilement la solution générale; on a, en effet,

$$u'_x = v'_y = w'_z = \frac{1}{3}\theta, \quad u'_y + v'_x = 0, \quad v'_z + w'_y = 0, \quad w'_x + u'_z = 0;$$

d'où l'on tire aisément

$$\begin{aligned}u''_{xx} &= -v''_{yy} = -w''_{zz} = \frac{1}{3}\theta'_x, \\ -v''_{xz} &= v''_{yz} = -v''_{zx} = \frac{1}{3}\theta'_y, \\ -w''_{xz} &= -w''_{yz} = w''_{zx} = \frac{1}{3}\theta'_z;\end{aligned}$$

puis

$$u''_{xy} + v''_{xy} = 0 = -\frac{1}{3}(\theta''_{xz} + \theta''_{yz})$$

et deux autres pareilles; d'où

$$\theta''_{xz} = \theta''_{yz} = \theta''_{zx} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\theta = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta xy + \varepsilon xz + \eta yz + \zeta xyz + \varphi,$$

$$3u = \alpha x^2 + 2\beta xy + 2\gamma xz + \delta x^2 y + \varepsilon x^2 z + 2\eta xyz + \zeta x^2 yz + 2\varphi x + \psi_1(x, z),$$

$$3v = 2\alpha xy + \beta y^2 + 2\gamma yz + \delta xy^2 + 2\varepsilon xyz + \eta y^2 z + \zeta xy^2 z + 2\varphi y + \psi_2(x, z),$$

$$3w = 2\alpha xz + 2\beta yz + \gamma z^2 + 2\delta xyz + \varepsilon xz^2 + \eta yz^2 + \zeta xyz^2 + 2\varphi z + \psi_3(x, y)$$

et, pour que les glissements soient nuls,

$$u''_{yz} = v''_{xz} = w''_{xy} = 0, \quad \delta = \varepsilon = \eta = \zeta = 0,$$

$$\psi_1 = -\alpha(y^2 + z^2) + \lambda y + \lambda' z + \lambda'',$$

$$\psi_2 = -\beta(z^2 + x^2) + \mu z + \mu' x + \mu'',$$

$$\psi_3 = -\gamma(x^2 + y^2) + \nu x + \nu' y + \nu'';$$

d'où, en somme,

$$u = \alpha(-x^2 - y^2 - z^2) + 2\beta xy + 2\gamma xz + 2\varphi x + \lambda y + \lambda' z + \lambda'',$$

$$v = \beta(-y^2 - x^2 - z^2) + 2\alpha xy + 2\gamma yz + 2\varphi y + \mu z + \mu' x + \mu'',$$

$$w = \gamma(-x^2 - y^2 - z^2) + 2\alpha xz + 2\beta yz + 2\varphi z + \nu x + \nu' y + \nu'',$$

solution qui ne diffère de la solution particulière que par l'orientation arbitraire de la ligne sans rotation.



aucune force élastique n'étant mise en jeu par cet état initial, les divers points conserveront leurs vitesses, et la déformation croîtra indéfiniment sans changer de caractère, l'hétérogénéité s'accroissant de plus en plus, indéfiniment, si le corps est illimité. On ne peut s'empêcher de remarquer une certaine analogie de propriétés d'une telle matière avec le fluide électrique unique de Franklin dans les corps conducteurs.

La différence est grande entre ce dernier corps et les liquides ou les gaz sans frottement. Ceux-ci sont en équilibre stable pour les déformations qui changent la densité; l'état homogène est stable; en particulier, un système quelconque de déplacements et de vitesses initiales n'entraîne de diminution infinie de la densité en aucun point, le corps reste continu. Au contraire, le dernier corps est instable pour les variations de densité, dès qu'elles sont accompagnées de vitesses initiales, si faibles qu'on les suppose; en certains points la densité peut diminuer indéfiniment, cela veut dire que la matière disparaît du voisinage de ces points, qu'il s'y forme une cavité, ne contenant plus de matière, en un mot, que le corps se rompt.

*Plasticité. Fragilité.* — L'examen de ces deux cas particuliers nous a donc suffi pour reconnaître les caractères qui distinguent la déformation progressive de la rupture, la plasticité de la fragilité.

*Lorsqu'une déformation particulière ne fait naître aucune réaction élastique dans un corps, l'équilibre du corps est indifférent ou instable pour cette déformation, suivant qu'elle est produite dans le corps sans vitesses ou avec vitesses initiales. Si cette déformation particulière ne produit pas de variation de densité, elle s'accroît sans rupture. Si cette déformation particulière produit une variation de densité, elle entraîne rapidement la rupture, dans les régions où la dilatation cubique est la plus grande.*

Nous ne connaissons pas de corps solide isotrope infiniment fragile, ce serait le corps insaisissable que nous avons étudié plus haut. Mais nous connaissons des corps très fragiles, tels que le verre, l'acier fortement trempé; nous connaissons aussi, outre les liquides et les gaz, toute une série de corps mous ou plastiques, intermédiaires entre les fluides et les solides proprement dits. Dans tous ces corps, l'instabi-

lité n'existe pas lorsque la pression à laquelle ils sont soumis est nulle; mais elle apparaît dès qu'ils sont soumis à une pression même faible, mais non uniforme.

*Un corps fragile est un corps dont de faibles déformations préalables altèrent assez l'élasticité pour rendre instables les variations de densité, en rendant nuls, puis négatifs les accroissements de tension correspondant à une diminution de densité.*

*Un corps plastique est un corps dont de faibles déformations préalables (celles qui résultent simplement de son poids, s'il est en quantité un peu grande) altèrent assez l'élasticité pour rendre instable un glissement sans variation de densité, en rendant nul, puis négatif l'accroissement de force tangentielle correspondant à l'accroissement de ce glissement.*

A. B. — Il ne s'agit pas des glissements en tous sens, ce qui rendrait le corps fluide, mais d'un glissement particulier en chaque point.

*Fusion pâteuse.* — Pour presque tous les corps isotropes, le coefficient d'élasticité de torsion ( $\mu$ ) diminue plus vite, lorsque la température croît, que le coefficient de compressibilité cubique. En général, ce coefficient conserve pourtant une valeur finie à la température de fusion, et pendant la fusion, lorsqu'elle est nette, le coefficient de torsion devient brusquement nul, et le coefficient de compressibilité cubique ( $3\lambda + 2\mu$ ) diminue brusquement beaucoup. Il existe pourtant des corps, peut-être sont-ce toujours des mélanges, qui se ramolissent et passent progressivement de l'état solide à l'état liquide sans point de fusion net; pour ceux-ci, le coefficient de torsion  $\mu$  n'éprouve pas de changement brusque et tombe sans discontinuité à zéro, bien que le coefficient de compressibilité cubique reste fini.

*Corps anisotropes.* — Considérons maintenant un corps homogène anisotrope. A température constante, en tenant compte de l'existence de l'énergie et de l'entropie, les forces élastiques sont données par les équations

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} N_x &= A_{11}D_x + A_{12}D_y + A_{13}D_z + A_{14}G_x + A_{15}G_y + A_{16}G_z, \\ T_x &= A_{11}D_x + A_{12}D_y + A_{13}D_z + A_{14}G_x + A_{15}G_y + A_{16}G_z, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

dans lesquelles l'ordre des indices des A est indifférent.

Ces six équations déterminent en général les déformations en fonction des forces. Il y a exception lorsque le déterminant des coefficients est nul. Appelons  $\Delta$  ce déterminant et  $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \dots$  ses mineurs par rapport à  $A_{11}, A_{12}, \dots$ , on a

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \Delta D_x = \Delta_{11} N_1 + \Delta_{12} N_2 + \Delta_{13} N_3 + \Delta_{14} T_1 + \Delta_{15} T_2 + \Delta_{16} T_3, \\ \Delta G_x = \Delta_{21} N_1 + \Delta_{22} N_2 + \Delta_{23} N_3 + \Delta_{24} T_1 + \Delta_{25} T_2 + \Delta_{26} T_3, \\ \Delta(D_x + D_y + D_z) = (\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13}) N_1 + (\Delta_{12} + \Delta_{22} + \Delta_{23}) N_2 + (\Delta_{13} + \Delta_{23} + \Delta_{33}) N_3 \\ \quad + (\Delta_{14} + \Delta_{24} + \Delta_{34}) T_1 + (\Delta_{15} + \Delta_{25} + \Delta_{35}) T_2 + (\Delta_{16} + \Delta_{26} + \Delta_{36}) T_3. \end{array} \right.$$

Lorsque le déterminant  $\Delta$  est nul, il y a entre les forces  $N, T$  une relation linéaire et homogène imposée par la nature du corps. Il y a donc une certaine combinaison de forces à laquelle le corps est incapable de résister; il y a une certaine déformation qui n'exige aucun travail et ne donne naissance à aucune réaction élastique. Le cristal est susceptible de déformation progressive ou de clivage suivant que la dilatation cubique est indépendante ou dépend de cette déformation critique.

Supposons, par exemple, que la composante  $T_3$  soit identiquement nulle quelle que soit la déformation, c'est-à-dire que sur les deux faces perpendiculaires, l'une à  $Ox$ , l'autre à  $Oy$ , aucune déformation ne puisse donner naissance à une composante tangentielle perpendiculaire à  $Oz$ . On a alors

$$A_{16} = A_{26} = A_{36} = A_{46} = A_{56} = A_{66} = 0,$$

ce qui fait disparaître le glissement  $G_z$  de toutes les autres forces élastiques et de l'énergie. Le glissement  $G_z$  n'exige aucun travail, il ne donne naissance à aucune réaction, il ne change pas l'état élastique du corps. Un déplacement

$$u = \varphi(y), \quad v = \psi(x), \quad w = 0$$

ne produit aucun changement des propriétés du corps; il est tout entier permanent. Un déplacement complexe dans lequel les glissements  $G_z$  ne sont pas nuls est en partie temporaire, en partie permanent. D'ailleurs ces glissements  $G_z$  se produiront toujours très facilement, puisque aucune réaction élastique ne les limite, lorsqu'un

accident quelconque les a fait commencer avec une vitesse même très petite.

Un pareil corps anisotrope serait solide en tous sens, à l'exception d'une direction dans un plan pour laquelle il serait fluide. Nous n'en connaissons aucun exemple rigoureux, mais nous savons par l'expérience de Reusch et Baumbauer sur le spath, que dans ce corps un grand glissement est possible sans rupture suivant un certain plan. Par conséquent une faible déformation préalable suffit pour rendre nuls les coefficients d'une certaine composante tangentielle de ce plan; ceux-ci sont donc très petits par rapport à la plupart des autres coefficients d'élasticité du spath dans l'état naturel.

Si la déformation qui ne met en jeu aucune force élastique est une certaine dilatation linéaire ou une combinaison de dilatations linéaires et de glissements, il arrivera en général que l'accroissement de cette déformation aura pour conséquence l'accroissement indéfini de la dilatation cubique suivant certains plans de direction déterminée, c'est-à-dire, comme nous l'avons expliqué plus haut (p. 351), la rupture du corps, suivant ces plans. Cela se produit dans un très grand nombre de cristaux à la suite de déformations préalables plus ou moins grandes. C'est le phénomène du *clivage* qui nous fournit ainsi des relations approchées entre les coefficients d'élasticité déjà réduits par les considérations de symétrie.

Je me borne ici à ces courtes indications sur les corps anisotropes, dont l'étude fera l'objet d'un prochain Mémoire.

*États vibratoires d'un corps homogène limité. Cas où une période est infinie.* — Nous allons retrouver les mêmes conclusions pour un corps limité en nous plaçant au point de vue dynamique au lieu du point de vue statique. Lorsque les forces élastiques sont des fonctions linéaires des déformations, l'équilibre est stable si l'énergie reste positive pour toute déformation virtuelle. Si l'on peut trouver un système de déformations virtuelles qui rende l'énergie nulle ou négative, l'équilibre est instable. Toute déformation virtuelle peut se décomposer en une infinité de déformations simples dont les périodes distinctes sont les racines d'une équation généralement transcendante. Un des modes d'investigation de la stabilité de l'équilibre consiste précisément,

comme on sait, à prouver que toutes les périodes sont nécessairement réelles si l'énergie virtuelle ne peut être que positive. La démonstration montre en même temps que, à une déformation virtuelle simple qui fournit une valeur nulle ou négative de l'énergie virtuelle correspond une période infinie ou imaginaire pure, c'est-à-dire une déformation qui croît avec le temps soit comme une fonction linéaire, soit comme une fonction exponentielle, instable par conséquent. Mais une déformation qui laisse l'énergie nulle, à laquelle ne correspond aucun travail, et par suite aucune réaction élastique, est précisément cette déformation indéterminée dont nous avons assez longuement parlé jusqu'ici. Les deux ordres de considérations sont donc parfaitement d'accord pour des corps élastiques homogènes isotropes ou non qui obéissent aux lois de Hooke. C'est une autre question de savoir s'il en est de même en dehors des limites de ces lois, et dont l'examen détaillé fera l'objet du troisième Mémoire.

*États vibratoires d'un corps illimité en tous sens. Cas où une vitesse de propagation est nulle.* Il semble qu'on fasse un raisonnement équivalent en partant d'un point de vue un peu différent. Dans un corps homogène indéfini, tout système de déplacements distribué par ondes planes uniformes a une vitesse de propagation déterminée qui dépend de l'orientation du plan d'onde et de l'orientation du déplacement. C'est ainsi que dans les solides isotropes de la Théorie de l'élasticité, les déplacements longitudinaux ont une vitesse de propagation, et les déplacements transversaux une autre. Dans les liquides et les gaz, la vitesse de propagation des déplacements transversaux est nulle; des deux systèmes de mouvements simples qui dans un corps isotrope se propagent indépendamment l'un de l'autre, rotations et dilatations cubiques, les premières ne se propagent pas dans les liquides et restent sur place soit comme déformations permanentes, soit comme vitesses de rotation constantes, sans altérer d'ailleurs la continuité du fluide.

De même, un déplacement simple quelconque peut se propager avec une vitesse finie, ou nulle, ou imaginaire pure; et à ces deux derniers cas correspondent des déplacements qui croissent avec le temps linéairement ou comme une exponentielle, sans se propager; ce sont donc des déplacements essentiellement instables, qui produisent une



déformation progressive ou la rupture, suivant qu'ils sont dépendants ou indépendants de la dilatation cubique.

L'étude des vitesses de propagation normale des ondes planes uniformes conduit donc à la conclusion suivante :

*L'état d'équilibre d'un corps illimité est stable lorsque la surface des vitesses normales est entièrement réelle; il est instable lorsque une nappe de cette surface passe par son centre sans devenir imaginaire, ou devient imaginaire à l'intérieur d'un certain cône tangent en son centre.*

Il suffit de se reporter aux équations du mouvement et de se rappeler par quelles opérations on obtient la surface des vitesses normales pour être convaincu que le nouveau critérium diffère des précédents. Montrons-en de suite un exemple : le corps isotrope incapable de résister à la moindre pression normale uniforme ( $3\lambda + 2\mu = 0$ ) a pourtant une surface d'onde complètement réelle, formée d'une nappe double sphérique de rayon  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  pour les vibrations transversales, et d'une nappe simple également sphérique de rayon  $\sqrt{\frac{4\mu}{3\rho}}$  pour les vibrations longitudinales, ou de condensation, car dans ce dernier cas l'inégalité des trois dilatations rectangulaires donne naissance à des forces élastiques déterminées, et la déformation qui n'est pas accompagnée de rotations ne se réduit pas à une pure dilatation cubique uniforme.

L'équilibre est pourtant indifférent ou instable; il est facile de s'en assurer. Considérons pour cela un système de déplacements produisant une dilatation cubique pure, c'est-à-dire satisfaisant aux équations

$$u_x = v_y = w_z = \frac{1}{3}\vartheta, \quad u'_x + v'_y = 0, \quad v'_z + w'_x = 0, \quad u'_x + u'_z = 0,$$

et dont la solution générale a été donnée en note. Des conditions écrites, on tire facilement

$$u''_x = \frac{1}{3}\vartheta_x, \quad u''_y = -v''_x = -\frac{1}{3}\vartheta_x, \quad u''_z = -w''_x = -\frac{1}{3}\vartheta_x,$$

et, en portant dans l'une des équations,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{3}\mu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \mu \Delta_x u,$$

on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

de même pour  $v$ ,  $w$ . Cette déformation particulière peut donc croître sans limite proportionnellement au temps, si les vitesses initiales d'accroissement de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ne sont pas rigoureusement nulles partout.

Une réserve est toutefois nécessaire : ce déplacement ne reste pas fini à toute distance, ce n'est donc pas un déplacement virtuel à considérer pour un milieu indéfini, mais seulement pour un milieu limité, quelle que soit sa forme d'ailleurs.

Telle est la cause de la différence des deux résultats.

*Le système de déplacements et de vitesses virtuelles admissible doit rester fini, même à distance infinie pour un corps illimité, mais seulement dans l'intérieur du corps pour un corps limité.*

Il est d'ailleurs facile de s'assurer <sup>(1)</sup> que tout système de déplacements dans un corps illimité résulte de la superposition d'ondes planes

(1) Considérons en effet un déplacement  $U$ , et appliquons la formule de Fourier

$$U = f(x, y, z) = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\pi^3} \cos \alpha(x - \xi) \cos \beta(y - \eta) \cos \gamma(z - \zeta),$$

ou en développant l'intégrale triple par rapport à  $d\xi d\eta d\zeta$ , et désignant par  $U_{111}$ ,  $U_{112}$ , ... des coefficients qui ne sont plus fonctions que de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,

$$U = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma \left( \begin{aligned} &U_{111} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z + U_{112} \cos \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z \\ &+ U_{121} \cos \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z + U_{122} \cos \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z \\ &+ U_{211} \sin \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z + U_{212} \sin \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z \\ &+ U_{221} \sin \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z + U_{222} \sin \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z \end{aligned} \right).$$

Le changement des variables  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  en d'autres qui définissent la normale à une onde plane uniforme se fait très facilement, en considérant  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  comme les coordonnées rectangulaires d'un point dont les coordonnées polaires sont  $\lambda$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ; l'élément de volume, quand on intègre par rapport à ces dernières variables, est

$$\lambda^2 \sin \theta d\theta d\lambda d\varphi.$$

On a d'ailleurs, en prenant  $Ox$  pour axe polaire,

$$\alpha = \lambda \cos \theta, \quad \beta = \lambda \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma = \lambda \sin \theta \sin \varphi,$$

*uniformes* convenablement choisies, d'amplitude finie lorsque les déplacements sont finis, même à distance infinie. Concluons donc :

*La limite de stabilité d'un corps illimité est donnée par la considération des vitesses de propagation normale des ondes planes et uniformes qui deviennent nulles.*

*La limite de stabilité du même corps pris en masse limitée de forme quelconque est donnée par la considération des déformations qui deviennent indéterminées.*

*Ces limites sont différentes, et la dernière généralement plus resserrée que la première.*

*Travail mécanique des métaux. — Le travail des métaux par lami-*

et, en posant

$$\begin{aligned} U_{111} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4, & U_{112} &= B_1 - B_2 + B_3 - B_4, \\ U_{122} &= -A_1 + A_2 + A_3 - A_4, & U_{121} &= B_1 + B_2 - B_3 - B_4, \\ U_{221} &= -A_1 - A_2 + A_3 + A_4, & U_{222} &= -B_1 + B_2 + B_3 - B_4, \\ U_{212} &= -A_1 + A_2 - A_3 + A_4, & U_{211} &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \end{aligned}$$

on peut écrire la parenthèse sous la forme

$$\begin{aligned} & A_1 \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z) + B_1 \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ & + A_2 \cos(\alpha x + \beta y - \gamma z) + B_2 \sin(\alpha x + \beta y - \gamma z), \\ & + A_3 \cos(\alpha x - \beta y + \gamma z) + B_3 \sin(\alpha x - \beta y + \gamma z), \\ & + A_4 \cos(\alpha x - \beta y - \gamma z) + B_4 \sin(\alpha x - \beta y - \gamma z), \end{aligned}$$

c'est-à-dire sous la forme de quatre ondes de période  $\frac{2\pi}{\lambda}$  ayant leurs normales dans les quatre trièdres droits autour de  $Ox$  positif. En étendant l'intégration à tout ce côté du plan  $Oyz$ , nous avons bien

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty [A \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z) + B \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z)] \lambda^2 d\lambda$$

et enfin

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi F(x \cos \theta + y \sin \theta \cos \varphi + z \sin \theta \sin \varphi).$$

Les ondes  $F$  sont bien des ondes planes uniformes, orientées en tous sens dans l'espace.



nage, étirage, martelage, exige que les forces mises en jeu par l'action continue des laminoirs, de la filière, ou l'action intermittente du marteau rendent indéterminée une déformation dans une partie au moins de l'épaisseur de la matière; l'indétermination s'étend d'ordinaire à toute l'épaisseur, ainsi qu'il résulte de l'étirage des fils à la Wollaston, du laminage des feuilles mixtes de plaqué. D'ailleurs, pour éviter la rupture, il faut que la déformation, qui devient indéterminée, soit indépendante de la dilatation cubique.

De ces trois procédés, le martelage est évidemment le plus incertain. Dans le laminage et l'étirage, l'outil produit un état instable à déformation progressive, agit pendant un certain temps sur chaque portion de matière et cesse brusquement d'agir; la durée d'action assez longue permet de se contenter de la limite d'instabilité pour obtenir une déformation permanente notable. Dans le martelage, au contraire, pour que chaque choc produise, malgré sa très courte durée, une déformation permanente appréciable, il faut dépasser notablement la limite d'instabilité, et il devient bien plus difficile d'éviter partout l'apparition des dilatations cubiques, causes de rupture totale, ou au moins d'une multitude de fêlures microscopiques et de l'*énervement* du métal.

*Rayure. Dureté.* — Une pointe appuyée à la surface d'un corps peut, lorsque la pression est suffisante, rendre indéterminée une déformation particulière au voisinage immédiat de la surface de contact. Il y aura alors pénétration de la pointe, avec formation d'un bourrelet latéral, si la dilatation cubique est indépendante de la déformation instable, et la pointe s'arrêtera dès que l'accroissement de la surface de contact aura assez diminué les pressions locales pour que l'indétermination et l'instabilité cessent. Si la dilatation cubique dépend de la déformation indéterminée, la pointe produira des ruptures orientées suivant la forme de la pointe et la symétrie de la surface, et pour une pointe arrondie la pulvérisation d'une partie de la matière sous-jacente. On voit de suite que, sous une pointe arrondie, la pénétration se fera, en général, sans rupture ou avec rupture, suivant que le corps étudié est plastique ou fragile, c'est-à-dire suivant que les déformations indéterminées, qui apparaissent le plus facilement, laissent hors de cause ou modifient la dilatation cubique.

Je n'ai fait dans cette introduction qu'indiquer rapidement les idées générales et leurs conséquences. Sur les divers sujets énumérés, clivage des cristaux, déformations progressives et permanentes ou rupture des corps isotropes, les Mémoires particuliers sont ou prêts ou très avancés et pourront, je pense, se succéder très rapidement dans ces *Annales*.



---

SUR UNE

# TRANSFORMATION DE MOUVEMENT,

PAR M. DAUTHEVILLE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

---

M. Appell a montré dans un récent Mémoire (1) que les transformations homographiques peuvent être appliquées avec avantage à diverses questions de Mécanique. A la fin de son Mémoire, M. Appell propose la généralisation suivante des résultats qu'il a obtenus.

Soient les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad q'_i = \frac{dq_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

où  $T$  est une forme quadratique de  $q'_1, \dots, q'_k$  avec des coefficients fonctions de  $q_1, \dots, q_k$ , et où  $Q_1, \dots, Q_k$  dépendent seulement de  $q_1, \dots, q_k$ . Trouver les transformations de la forme

$$\begin{aligned} r_i &= f_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ dt_1 &= \lambda(q_1, q_2, \dots, q_k) dt \end{aligned}$$

qui transforment ces équations en d'autres de la forme

$$\frac{d}{dt_1} \left( \frac{\partial S}{\partial r'_i} \right) - \frac{\partial S}{\partial r_i} = R_i, \quad r'_i = \frac{dr_i}{dt_1} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

où  $S$  désigne une forme quadratique de  $r'_1, \dots, r'_k$  avec des coefficients fonctions de  $r_1, \dots, r_k$  et où  $R_1, \dots, R_k$  dépendent seulement de  $r_1, \dots, r_k$ .

---

(1) *De l'homographie en Mécanique*, par M. Appell (*American Journal of Mathematics*, vol. XII, p. 103).

Nous nous proposons de considérer le cas du mouvement d'un point sur une surface ( $K = 2$ ) et de montrer que les transformations cherchées sont celles qui conservent les lignes géodésiques, ainsi que l'a prévu M. Appell.

## I.

Considérons deux surfaces  $S$  et  $S_1$ , et faisons correspondre un point réel de la première à un point réel de la seconde. On sait, par un théorème dû à M. Tisserand, qu'il existe sur la première un système orthogonal auquel correspond sur la seconde un système orthogonal. Rapportons les surfaces à ces deux systèmes orthogonaux. Soient

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2, \quad ds_1^2 = E_1 du^2 + G_1 dv^2$$

les expressions des éléments linéaires de  $S$  et  $S_1$ . Considérons un point matériel, de masse égale à l'unité, dont le mouvement sur la surface  $S$  est déterminé par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial u'} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = P, & u' = \frac{du}{dt}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v'} \right) - \frac{\partial T}{\partial v} = Q, & v' = \frac{dv}{dt}, \end{cases}$$

où

$$2T = E u'^2 + G v'^2,$$

et où  $P, Q$  dépendent de  $u, v$  seulement.

Considérons maintenant un second point, de masse égale à l'unité, en mouvement sur la surface  $S_1$ , et imaginons que les coordonnées de ce point sont fonctions d'une nouvelle variable  $t_1$ , liée à  $t$  par l'équation

$$(2) \quad dt_1 = \lambda(u, v) dt.$$

Le mouvement du second point sera déterminé par les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt_1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial u'_1} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial u} = P_1, & u'_1 = \frac{du}{dt_1}, \\ \frac{d}{dt_1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial v'_1} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial v} = Q_1, & v'_1 = \frac{dv}{dt_1}, \end{cases}$$

où

$$2T_1 = E_1 u'^2_1 + G_1 v'^2_1.$$

La question que l'on se propose de résoudre se réduit à celle-ci : Est-il possible de déterminer la fonction  $\lambda$  de manière que  $P_1$  et  $Q_1$  soient indépendants de  $u'_1$  et de  $v'_1$  ?

Des équations (1) et (3) on déduit

$$(4) \quad \begin{cases} P = E \frac{du'}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} u'^2 + \frac{\partial E}{\partial v} u' v' - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} v'^2, \\ Q = G \frac{dv'}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} u'^2 + \frac{\partial G}{\partial u} u' v' + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} v'^2 \end{cases}$$

et

$$(5) \quad \begin{cases} P_1 = E_1 \frac{du'_1}{dt_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial u} u_1'^2 + \frac{\partial E_1}{\partial v} u'_1 v'_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial u} v_1'^2, \\ Q_1 = G_1 \frac{dv'_1}{dt_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial v} u_1'^2 + \frac{\partial G_1}{\partial u} u'_1 v'_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial v} v_1'^2. \end{cases}$$

On a maintenant

$$u' = u'_1 \lambda(u, v), \quad v' = v'_1 \lambda(u, v),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{du'_1}{dt_1} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{du'}{dt} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} u'^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} u' v' \right), \\ \frac{dv'_1}{dt_1} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{dv'}{dt} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} u' v' + \frac{\partial \lambda}{\partial v} v'^2 \right). \end{aligned}$$

Remplaçant dans ces équations  $\frac{du'}{dt}$ ,  $\frac{dv'}{dt}$  par les valeurs déduites de (4), et portant dans (5) les valeurs ainsi obtenues pour  $\frac{du'_1}{dt_1}$ ,  $\frac{dv'_1}{dt_1}$ , on trouve finalement

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{E_1 P}{E \lambda^2} - \left( \frac{E_1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{E_1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) u_1'^2 \\ &\quad - \left( \frac{E_1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial E_1}{\partial v} + \frac{E_1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) u'_1 v'_1 \\ &\quad + \left( \frac{E_1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial u} \right) v_1'^2, \\ Q_1 &= \frac{G_1 Q}{G \lambda^2} + \left( \frac{G_1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial v} \right) u_1'^2 \\ &\quad - \left( \frac{G_1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial u} + \frac{G_1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) u'_1 v'_1 \\ &\quad - \left( \frac{G_1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial v} + \frac{G_1}{\lambda} \frac{\partial G_1}{\partial v} \right) v_1'^2. \end{aligned}$$

En exprimant que  $P_1$ ,  $Q_1$  sont indépendants de  $u_1$ ,  $v_1$ , on a les équations

$$\frac{E_1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{E_1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{E_1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial E_1}{\partial v} + \frac{E_1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{E_1}{E} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{G_1}{G} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial E_1}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{G_1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial u} + \frac{G_1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{G_1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial v} + \frac{G_1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0.$$

Ces équations sont équivalentes aux suivantes :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{E_1} \frac{\partial E_1}{\partial u} \right), \\ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\left( \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{E_1} \frac{\partial E_1}{\partial v} \right), \\ \frac{1}{E} \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{E_1} \frac{\partial G_1}{\partial u}, \\ \frac{1}{G} \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{G_1} \frac{\partial E_1}{\partial v}, \\ \frac{2}{G} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial u} = \frac{2}{G_1} \frac{\partial G_1}{\partial u} - \frac{1}{E_1} \frac{\partial E_1}{\partial u}, \\ \frac{2}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{2}{E_1} \frac{\partial E_1}{\partial v} - \frac{1}{G_1} \frac{\partial G_1}{\partial v}. \end{array} \right.$$

Les quatre dernières, étant indépendantes de  $\lambda$ , sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème proposé admette une solution. On reconnaît dans ces conditions celles qui expriment que les lignes géodésiques se correspondent sur les deux surfaces considérées <sup>(1)</sup>.

Si l'on suppose ces équations identiquement vérifiées, les deux pre-

---

(1) G. DARBOUX. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, III<sup>e</sup> Partie, p. 49.

mières donnent  $\lambda$ . On en déduit, en effet,

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{E\lambda^2}{E_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{E\lambda}{E_1} = 0$$

ou bien

$$\frac{E\lambda^2}{E_1} = V_2, \quad \frac{E\lambda}{E_1} = U_2,$$

$V_2$  désignant une fonction de  $v$ , et  $U_2$  une fonction de  $u$ . Adoptons les notations employées par M. Darboux dans son Livre *Sur la théorie générale des surfaces* <sup>(1)</sup>. L'intégration des quatre dernières équations (6) donne

$$\frac{E}{E_1} = VU^2,$$

$V$  étant une fonction de  $v$  et  $U$  une fonction de  $u$ . On aura donc

$$\lambda^2 = \frac{V_2}{VU^2}, \quad \lambda = \frac{U_2}{VU}.$$

De là

$$V_2 V = \left( \frac{U_2}{U} \right)^2 = K^2,$$

$K$  étant une constante.

On a, par suite,

$$V_2 = \frac{K^2}{V}, \quad U_2 = KU, \quad \lambda = \frac{K}{VU}.$$

La solution du problème est achevée, et l'on voit que les transformations cherchées sont précisément celles qui permettent de représenter géodésiquement l'une des surfaces considérées sur l'autre.

## II.

Considérons en particulier le cas où l'une des surfaces est un plan. Nous pourrions effectuer complètement les calculs et obtenir sous forme explicite les transformations que nous avons en vue.

---

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.*

Soit un mouvement plan défini par les équations

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y,$$

où  $x, y$  désignent des coordonnées cartésiennes rectangulaires et où l'on suppose que  $X, Y$  sont fonctions de  $x, y$  seulement. Considérons une surface rapportée au système de coordonnées curvilignes formées par une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales. L'expression de l'élément linéaire est

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Le mouvement sur la surface d'un point de masse égale à l'unité est déterminé par les équations

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt_1} \left( \frac{\partial T}{\partial u'} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = P, & u' = \frac{du}{dt_1}, \\ \frac{d}{dt_1} \left( \frac{\partial T}{\partial v'} \right) - \frac{\partial T}{\partial v} = Q, & v' = \frac{dv}{dt_1}, \\ 2T = u'^2 + C^2 v'^2, \end{cases}$$

où  $t_1$  désigne le temps.

Proposons-nous de trouver les transformations de la forme

$$(3) \quad x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad dt_1 = \lambda(u, v) dt,$$

qui transforment les équations (1) en les équations (2), avec la condition que  $P$  et  $Q$  soient indépendants de  $u', v'$ .

On déduit de (2)

$$(4) \quad \begin{cases} P = \frac{du'}{dt_1} - C \frac{\partial C}{\partial u} v'^2, \\ Q = C^2 \frac{dv'}{dt_1} + 2C \frac{\partial C}{\partial u} u' v' + C \frac{\partial C}{\partial v} v'^2. \end{cases}$$

En différentiant (3) et tenant compte de (1), on a

$$\begin{aligned} X = & \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du'}{dt_1} + \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv'}{dt_1} + \left( \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) u'^2 \\ & + \left( 2\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \right) u' v' + \left( \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) v'^2, \end{aligned}$$



$$Y = \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du'}{dt_1} + \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv'}{dt_1} + \left( \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) u'^2 \\ + \left( 2 \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u \partial v} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) u' v' + \left( \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) v'^2.$$

Portant dans (4) les valeurs de  $\frac{du'}{dt_1}$ ,  $\frac{dv'}{dt_1}$  fournies par ces équations, on obtient les valeurs de P, Q en fonction de  $u, v, u', v'$ . En égalant à zéro les coefficients de  $u'^2$ ,  $u'v'$ ,  $v'^2$  dans P et Q, on a six équations pour déterminer  $f$ ,  $\varphi$  et  $\lambda$ . On trouve ainsi, en posant, pour abréger l'écriture,  $\Delta = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}$ ,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \\ \frac{2}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0, \\ \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial C}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0, \\ \frac{2}{\Delta} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{2}{C} \frac{\partial C}{\partial u} = 0, \\ \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial v} = 0. \end{array} \right.$$

La quatrième équation s'intègre immédiatement et donne

$$f = V\varphi + V_1,$$

V et  $V_1$  désignant deux fonctions de  $v$ .

Imaginons que la famille de géodésiques qui intervient dans le système de coordonnées curvilignes auquel on rapporte la surface soit formée par les géodésiques passant par le point de la surface qui correspond à l'origine des coordonnées dans le plan. Alors à chaque valeur de  $v$  en correspond une de  $u$  pour laquelle on a identiquement  $f = \varphi = 0$ . Il en résulte que  $V_1$  est identiquement nulle et que l'on a

$f = V\varphi$ . Cela posé, le système (5) devient, par quelques réductions simples,

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = V\varphi, \\ \frac{2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial u}} + \frac{V'' \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{V' \frac{\partial\varphi}{\partial u}} - \frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}} = C \frac{\partial C}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \log \left( \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \log \left[ \frac{\lambda \left( \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right)^2}{\varphi^2} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \log \left( \frac{\lambda\varphi^2}{C^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \log \left( \frac{V'\lambda\varphi^2}{C} \right) = 0, \end{array} \right.$$

$V'$  et  $V''$  étant les dérivées première et seconde de la fonction  $V$ .

On intègre immédiatement les quatre dernières équations, et l'on trouve

$$\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial u} = V_1, \quad \frac{\lambda}{\varphi^2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right)^2 = U_1, \quad \frac{\lambda\varphi^2}{C^2} = V_2, \quad \frac{V'\lambda\varphi^2}{C} = U_2,$$

$V_1, V_2$  désignant des fonctions de  $v$ , et  $U_1, U_2$  des fonctions de  $u$ . Ces équations s'écrivent

$$\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial u} = V_1, \quad \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{U_1}{V_1}, \quad C^2 = \frac{V_1^2}{U_1 V_2}, \quad V' C = \frac{U_2}{V_2}.$$

Les deux dernières montrent que  $C$  doit être le produit d'une fonction de  $u$  par une fonction de  $v$ . Posons donc

$$C = \alpha\beta,$$

$\alpha$  désignant une fonction donnée de  $u$  et  $\beta$  une fonction donnée de  $v$ . On aura

$$\frac{\alpha}{U_2} = \frac{1}{\beta V' V_2} = \frac{B}{A}, \quad \alpha^2 U_1 = \frac{V_1^2}{\beta^2 V_2} = AB,$$

$A, B$  désignant deux constantes. De là

$$V_1 = A \sqrt{\frac{\beta}{V'}}, \quad U_1 = \frac{AB}{\alpha^2},$$

et ensuite

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} = A \sqrt{\frac{\beta}{V'}},$$

$$\frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = B \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\frac{V'}{\beta}}.$$

En intégrant la dernière équation, on obtient

$$(7) \quad \varphi = \frac{R}{U + S},$$

où l'on a posé

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{\beta}{V'}},$$

$$U = - \int \frac{du}{\alpha^2}$$

et où S désigne une fonction de  $v$ .

On voit par ce qui précède que le système (6) peut être remplacé par le suivant,

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = V \varphi, \\ \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} = A \sqrt{\frac{\beta}{V'}}, \\ \varphi = \frac{R}{U + S}, \\ \frac{2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2}{\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}} + \frac{V'' \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{V' \frac{\partial \varphi}{\partial u}} - \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} = \alpha \alpha' \beta^2, \end{array} \right.$$

où  $\alpha' = \frac{dx}{du}$ , et tout se réduit à déterminer les fonctions V et S au moyen de la dernière équation (8). Remplaçant  $\varphi$  par sa valeur, on a

$$(U + S)(RR''V' - 2R'^2V' - RR'V'') \\ + 2RR'S'V' + R^2S'V'' - R^2S''V' = R^2V'\beta^2U'\alpha\alpha'.$$

Différentiant par rapport à  $u$ ,

$$\frac{RR''V' - 2R'^2V' - RR'V''}{R^2V'\beta^2} = \frac{U''\alpha\alpha' + U'\alpha'^2 + U'\alpha\alpha''}{U'}$$

ou bien

$$\frac{RR''V' - 2R'^2V' - RR'V''}{R^2V'\beta^2} = \alpha\alpha'' - \alpha'^2 = D,$$

$D$  étant une constante.

L'équation devient alors

$$\frac{DSRV'\beta^2 + 2R'S'V' + RS'V'' - RS''V'}{RV'\beta^2} = U'\alpha\alpha' - DU = D_1,$$

$D_1$  étant une nouvelle constante.

Par suite, si l'on pose

$$(9) \quad \begin{cases} D = \alpha\alpha'' - \alpha'^2, \\ D_1 = U'\alpha\alpha' - DU, \end{cases}$$

on aura, pour déterminer  $V$  et puis  $S$ , les équations

$$(10) \quad RR''V' - 2R'^2V' - RR'V'' - DR^2V'\beta^2 = 0,$$

$$(11) \quad DSRV'\beta^2 + 2R'S'V' + RS'V'' - RS''V' - D_1RV'\beta^2 = 0.$$

Si l'on différentie la première équation (9), on a

$$\alpha\alpha''' - \alpha'\alpha'' = 0,$$

$$\frac{d}{du} \log \frac{\alpha''}{\alpha} = 0,$$

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \text{const.}$$

ou bien, comme on le voit aisément,

$$-\frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = \text{const.}$$

Cette quantité constante exprime la courbure totale de la surface,

d'après une formule due à Gauss (1). Ainsi la transformation cherchée ne peut être effectuée que si la surface donnée est à courbure constante.

Plaçons-nous dans cette hypothèse. Les formules données par M. Darboux (2) nous permettront d'achever le calcul.

Si l'on suppose la courbure nulle, on a

$$C^2 = u^2;$$

de là

$$\alpha = u,$$

$$\beta = 1.$$

On trouve alors

$$U = \frac{1}{u},$$

$$D = -1,$$

$$D_1 = 0.$$

Les équations (10) et (11) deviennent

$$3V'^2 - 2V'V'' + 4V'^2 = 0,$$

$$S'' + S = 0.$$

On en déduit

$$V = E \tan(v + F) + G,$$

$$S = H \sin v + K \cos v,$$

et ensuite

$$(12) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{m'(u \sin v) + n'(u \cos v) + p'}{m(u \sin v) + n(u \cos v) + p}, \\ f = \frac{m''(u \sin v) + n''(u \cos v) + p''}{m(u \sin v) + n(u \cos v) + p}, \\ \lambda = q[m(u \sin v) + n(u \cos v) + p]^2, \end{cases}$$

$m, n, p, \dots$  étant des constantes.

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 416.

(2) *Ibid.*, p. 46.

Si l'on suppose que la courbure est positive et égale à  $\frac{1}{a^2}$ , on aura

$$C^2 = a^2 \sin^2 \frac{u}{a},$$

$$\alpha = a \sin \frac{u}{a},$$

$$\beta = 1.$$

De là

$$U = \frac{1}{a \operatorname{tang} \frac{u}{a}},$$

$$D = -1,$$

$$D_1 = 0.$$

On trouve, pour déterminer V, S, les mêmes équations que dans le cas précédent, et l'on obtient finalement

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{m' \left( \sin v \operatorname{tang} \frac{u}{a} \right) + n' \left( \cos v \operatorname{tang} \frac{u}{a} \right) + p'}{m \left( \sin v \operatorname{tang} \frac{u}{a} \right) + n \left( \cos v \operatorname{tang} \frac{u}{a} \right) + p}, \\ f = \frac{m'' \left( \sin v \operatorname{tang} \frac{u}{a} \right) + n'' \left( \cos v \operatorname{tang} \frac{u}{a} \right) + p''}{m \left( \sin v \operatorname{tang} \frac{u}{a} \right) + n \left( \cos v \operatorname{tang} \frac{u}{a} \right) + p}. \end{array} \right.$$

Enfin, si la courbure vaut  $-\frac{1}{a^2}$ , on a

$$U = \frac{2e^{-\frac{u}{a}}}{a \left( e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}} \right)},$$

$$D = -1,$$

$$D_1 = -\frac{1}{a}.$$

L'équation en V est la même que dans les cas précédents, et l'équation en S est

$$S'' + S - \frac{1}{a} = 0.$$

Elle donne

$$S = H \sin v + K \cos v + \frac{1}{a},$$

et l'on trouve

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{m' \left( \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \sin v \right) + n' \left( \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \cos v \right) + p'}{m \left( \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \sin v \right) + n \left( \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \cos v \right) + p}, \\ f = \frac{m'' \left( \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \sin v \right) + n'' \left( \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \cos v \right) + p''}{m \left( \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \sin v \right) + n \left( \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \cos v \right) + p}. \end{array} \right.$$

Telles sont les transformations que nous nous proposons d'obtenir.

Dans le Chapitre que nous avons précédemment cité, M. Darboux donne les équations suivantes pour les lignes géodésiques :

$$A u \cos v + B u \sin v + C = 0,$$

$$A \operatorname{tang} \frac{u}{a} \cos v + B \operatorname{tang} \frac{u}{a} \sin v + C = 0,$$

$$A \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \cos v + B \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}} \sin v + C = 0.$$

Nous avons écrit dans les deux dernières  $\frac{u}{a}$  au lieu de  $u$ , pour faire concorder les notations. L'éminent géomètre ajoute :

« Si l'on représente la surface sur le plan en prenant pour les coordonnées rectangulaires  $x$  et  $y$  du point du plan les coefficients de  $A$  et de  $B$  dans les équations précédentes, les lignes géodésiques de la surface correspondent aux droites du plan.... Quand on a effectué une représentation de la surface considérée sur le plan, on les ob-

tient *toutes* en faisant suivre cette représentation, quelque particulière qu'elle soit, de la transformation homographique la plus générale dans le plan. »

Cela étant acquis, il suffit de considérer les formules (12), (13) et (14) pour constater que les transformations qui répondent au problème proposé par M. Appell sont celles qui transforment les droites du plan en lignes géodésiques de la surface (1).

---

(1) Les résultats contenus dans cette Note ont fait l'objet d'une communication que nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences (séance du 8 décembre 1890).



ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

SUPPLÉMENT  
AU  
TOME VII — ANNÉE 1890  
(TROISIÈME SÉRIE).



---

MÉMOIRE SUR L'OPTIQUE.

---

INFLUENCE

DU

TERME DE DISPERSION DE BRIOT

SUR LES

LOIS DE LA DOUBLE RÉFRACTION,

PAR M. E. CARVALLO,

PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS.

---

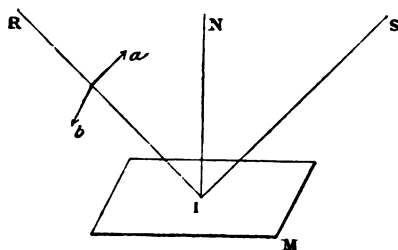
INTRODUCTION.

1. En étudiant la dispersion de la lumière dans le spath d'Islande, j'ai rencontré des particularités dont les conséquences peuvent apporter d'importants documents sur la théorie de la lumière. Celle qui m'a paru le plus remarquable, et que je me propose d'approfondir surtout dans ce Mémoire, est relative au terme de Briot : elle permet de trancher entre l'hypothèse de Fresnel et celle de Mac-Cullagh et Neumann sur la position de la vibration lumineuse par rapport au plan de polarisation d'un rayon polarisé rectilignement.

Considérons un faisceau lumineux parallèle, réfléchi par le miroir M (*fig. 1*) et suivant le chemin SIR. Pour une incidence convenable, le rayon IR est *polarisé* : la vibration lumineuse est rectiligne, perpendiculaire au rayon ; de plus, elle est ou dans le plan de polarisation, suivant *a*, ou perpendiculaire à ce plan, suivant *b*. C'est une conséquence mathématique de l'expérience de Fresnel et Arago, dans laquelle *deux rayons polarisés et sensiblement parallèles interfèrent si les plans de polarisation sont parallèles et n'interfèrent pas si ces plans sont perpendiculaires*.

Tout le monde est d'accord sur ce point. Mais la vibration est-elle perpendiculaire au plan de polarisation, suivant l'hypothèse de Fresnel? Est-elle au contraire dans le plan de polarisation, comme le

Fig. 1.



veulent Mac Cullagh et Neumann? Telle est la grande et longue querelle.

« Il paraît difficile, dit Lamé, de décider par l'expérience laquelle de ces deux directions est la véritable; car, quelle que soit celle qu'on adopte, les deux rayons réfractés (dans un milieu biréfringent) sont polarisés à angle droit, et toutes les conséquences relatives à la polarisation sont les mêmes. »

En parlant ainsi, le célèbre physicien n'entend s'occuper que du terme principal de l'équation du mouvement lumineux. Je pense que la question peut au contraire être résolue par l'étude des termes de dispersion, et j'espère pousser la démonstration assez loin pour convaincre la généralité des physiciens et des géomètres en ne leur demandant que des choses admises par tous. Mais cette question m'a conduit à diverses recherches dont plusieurs ont été fructueuses et que je dois faire connaître, notamment sur les formules d'interpolation et les formules de dispersion, et sur les erreurs systématiques des mesures goniométriques. Le Mémoire sera partagé en quatre Chapitres. Le premier traite des formules d'interpolation, préliminaire nécessaire au deuxième Chapitre; celui-ci, par l'étude des formules de dispersion, pose les bases du troisième Chapitre, où l'on s'occupe de l'influence de la dispersion sur les lois de la double réfraction. Enfin, le quatrième fournit le contrôle de la théorie par l'étude expérimentale dans le spath d'Islande.



## CHAPITRE I.

## FORMULES D'INTERPOLATION ET DE DISPERSION.

---

2. Une formule de *dispersion* est une relation à coefficients numériques applicable à une certaine étendue du spectre et qui lie l'indice de réfraction à la longueur d'onde. Dans la recherche d'une pareille formule, comme dans celle de toute formule d'*interpolation*, on rencontre deux sortes de difficultés : c'est d'abord le choix de la forme analytique qu'on doit adopter; celle-ci dépend des idées théoriques particulières au sujet; j'en remets donc l'étude à un autre Chapitre et me contente de dire ici que, résultant d'un développement en série, la formule sera linéaire par rapport aux coefficients inconnus. La forme étant choisie, il s'agit de faire concourir toutes les observations, chacune avec le poids qui lui convient, à la détermination des coefficients en nombre moindre que contient la formule.

Deux méthodes principales sont usitées pour cet objet, celle de Cauchy inventée tout exprès pour ses études sur la dispersion, et celle de Legendre (méthode des moindres carrés). La deuxième seule est conforme au Calcul des Probabilités; néanmoins la première lui est généralement préférée, à cause des grands avantages pratiques qu'elle présente.

La divergence des deux méthodes vient de ce que les formules de Cauchy, prises dans leur sens restreint, fixent d'une façon absolue, et différente de celle des moindres carrés, les combinaisons à faire des observations. J'ai pu heureusement leur donner une grande généralité. La souplesse qu'elles y gagnent permet de leur faire représenter telles combinaisons que l'on veut des observations, par suite de les adapter à la méthode des moindres carrés en conservant tous leurs avantages pratiques.

Bien plus, elle permet de modifier, dans le cours des calculs, le poids d'une ou plusieurs observations. Ces modifications sont quelque-

fois nécessitées par une évaluation erronée de la précision des expériences; d'autres fois, elles simplifient les calculs sans leur faire perdre de leur exactitude; dans tous les cas, elles permettent de faire la part de ce que la méthode des moindres carrés présente d'utiles indications et de ce qu'elle offre de dangereuses illusions.

J'exposerai la méthode de Cauchy, puis la généralisation et l'adaptation de ses formules à la méthode des moindres carrés; enfin je présenterai quelques observations critiques sur les deux méthodes.

### § I. — Méthode de Cauchy.

3. Soit à déterminer les coefficients  $a, b, c, \dots$  de la formule

$$(1) \quad y = au + bv + cw + \dots$$

dans laquelle des systèmes de valeurs simultanées des variables  $y, u, v, w, \dots$  peuvent être déterminés expérimentalement. A chaque observation correspond une égalité telle que la précédente, de sorte que l'observation de rang  $i$  donne

$$y_i = au_i + bv_i + cw_i + \dots$$

Généralement, le second membre de la formule (1) résulte d'un développement en série, de sorte que les termes décroissent rapidement; cette remarque a conduit Cauchy à procéder par approximations successives.

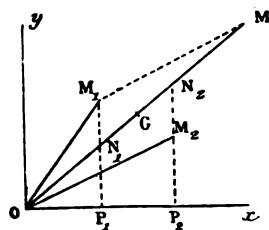
4. *Première approximation.* — Je suppose d'abord que les termes qui suivent le premier sont négligeables; alors les observations, au nombre de  $n$ , donnent, pour déterminer  $a$ , les égalités

$$y_1 = au_1, \quad y_2 = au_2, \quad \dots, \quad y_n = au_n.$$

Je prends deux axes coordonnés  $Ox, Oy$  (*fig. 2*); je considère le point  $M_1$ , qui a pour coordonnées  $OP_1 = u_1, P_1M_1 = y_1$ , et je joins  $OM_1$ . Le coefficient angulaire de  $OM_1$  est  $\frac{y_1}{u_1}$ ; c'est donc la valeur qui résulterait pour  $a$  de la première des égalités (1). A chaque égalité répond de même une droite dont le coefficient angulaire est une détermination

de  $a$ . Si donc les observations étaient exactement concordantes, toutes ces droites coïncideraient en direction; mais il n'en est pas généralement ainsi. La solution de Cauchy consiste à prendre la résultante OM <sup>(1)</sup> des droites OM<sub>1</sub>, OM<sub>2</sub>, ..., OM<sub>n</sub> et à adopter pour valeur de l'inconnue  $a$  le coefficient angulaire de cette résultante OM. Pour obtenir celle-ci, il suffit, comme on sait, de joindre le point O au centre

Fig. 2.



de gravité G des points M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, ..., M<sub>n</sub> et de porter sur la droite obtenue le segment OM = n OG. Reste à représenter l'écart entre l'observation et le calcul. La valeur de  $y$  correspondante à  $u_1$  est, par la première observation,  $y_1 = P_1 M_1$ ; si j'appelle N<sub>1</sub> l'intersection de P<sub>1</sub>M<sub>1</sub> avec OM, la valeur correspondante à l'abscisse  $u_1$  est  $au_1 = P_1 N_1$ .

L'écart entre l'observation et le calcul est donc

$$P_1 M_1 - P_1 N_1 = N_1 M_1.$$

Cette explication géométrique, que j'ai cru devoir substituer à l'explication analytique de Cauchy, conduit aux conclusions suivantes :

1° On reconnaît dans la solution adoptée une généralisation de la moyenne arithmétique; G mérite bien le nom de *point moyen*, OG celui de *direction moyenne*; d'après une propriété des centres de gravité, la somme algébrique des écarts N<sub>1</sub>M<sub>1</sub>, N<sub>2</sub>M<sub>2</sub>, ... est égale à zéro comme pour les moyennes arithmétiques.

2° On doit supposer toutes les valeurs de  $u$  positives; si  $u_1$ , par exemple, était négatif, on devrait, pour ne pas diminuer la précision du résultat, changer les signes des deux membres de la première égalité. Il suffit, pour s'en convaincre, d'imaginer le cas extrême où la somme  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  serait nulle. Le point M, qui aurait pour abscisse

(1) La figure représente la construction pour deux points M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>.

cette somme nulle ne pourrait pas faire connaître la direction moyenne cherchée.

3° De ce qui précède résulte cette règle :

*Ajouter membre à membre les égalités*

$$(1) \quad y_1 = au_1, \quad y_2 = au_2, \quad \dots, \quad y_n = au_n,$$

*après avoir multiplié les deux membres de chacune d'elles par +1 ou -1, suivant que la valeur correspondante de u est positive ou négative.*

J'appelle  $y_a$  et  $u_a$  les sommes obtenues dans le calcul de  $a$ , et que (pour me servir d'une expression empruntée à la Mécanique) j'appelle *valeurs résultantes* des nombres  $y$  et des nombres  $u$  affectés des poids +1 ou -1. L'équation ainsi formée pour le calcul de l'inconnue  $a$  s'écrit

$$(2) \quad y_a = au_a,$$

d'où l'on tire

$$(A) \quad a = \frac{y_a}{u_a}.$$

Les écarts entre l'observation et le calcul sont

$$\Delta y_1 = y_1 - \frac{y_a}{u_a} u_1, \quad \Delta y_2 = y_2 - \frac{y_a}{u_a} u_2, \quad \dots, \quad \Delta y_n = y_n - \frac{y_a}{u_a} u_n.$$

Comme vérification des calculs numériques, la valeur résultante de ces différences doit être nulle; car elle a pour expression

$$[\Delta y]_a = \left( y - \frac{y_a}{u_a} u \right)_a = y_a - \frac{y_a}{u_a} u_a = 0.$$

5. *Deuxième approximation.* — Ces écarts doivent présenter les caractères d'erreurs accidentelles; s'il n'en est pas ainsi, c'est que certains termes négligés doivent être rétablis, et l'équation (1) doit s'écrire, en introduisant par exemple le deuxième terme,

$$(1) \quad y = au + bv.$$

L'équation résultante (2) de la première approximation s'écrira



alors

$$(2) \quad \gamma_a = au_a + bv_a.$$

Je vais combiner les égalités (1) et (2) de manière à mettre en évidence les différences du premier ordre. Pour cela, je retranche membre à membre ces égalités après avoir multiplié les deux membres de (2) par  $\frac{1}{u_a} u$ ; j'obtiens l'égalité

$$(3) \quad \gamma - \frac{\gamma_a}{u_a} u = b \left( v - \frac{v_a}{u_a} u \right),$$

que j'écris avec Cauchy

$$(3') \quad \Delta\gamma = b \Delta v,$$

en représentant d'une façon générale par  $\Delta X$  la différence  $X - \frac{X_a}{u_a} u$ .

L'égalité (3') écrite pour chacune des  $n$  observations fournit  $n$  nouvelles égalités ne renfermant plus que l'inconnue  $b$  et sur lesquelles j'opère comme dans la première approximation. Je les ajoute membre à membre après avoir multiplié les deux membres de chacune d'elles par  $+1$  ou  $-1$ , suivant que la valeur correspondante de  $\Delta v$  est positive ou négative. Je représente par l'indice  $b$  les valeurs résultantes fournies par les nouveaux poids et, au lieu de  $[\Delta\gamma]_b$  par exemple, j'écris  $\Delta\gamma_b$ , ce qui ne risque pas d'apporter de confusion.

J'obtiens ainsi, pour déterminer  $b$ , l'équation

$$(4) \quad \Delta\gamma_b = b \Delta v_b.$$

Le système des équations (2) et (4) donne, pour les inconnues  $a$  et  $b$  de la deuxième approximation, les valeurs

$$(B) \quad \begin{cases} b = \frac{\Delta\gamma_b}{\Delta v_b}, \\ a = \frac{\gamma_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a}. \end{cases}$$

Les différences entre l'observation et le calcul s'obtiennent en écri-

vant, pour les  $n$  observations, la formule

$$\Delta^2 y = \Delta y - \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v.$$

Elles offrent les vérifications suivantes :

$$\Delta^2 y_a = 0, \quad \Delta^2 y_b = 0.$$

6. *Troisième approximation.* — Si ces différences ne présentent pas les caractères d'erreurs accidentelles, les égalités précédentes doivent s'écrire, en ajoutant un troisième terme,

$$(1) \quad y = au + bv + cw,$$

$$(2) \quad y_a = au_a + bv_a + cw_a,$$

$$(3) \quad y - \frac{y_a}{u_a} u = b \left( v - \frac{v_a}{u_a} u \right) + c \left( w - \frac{w_a}{u_a} u \right),$$

$$(3') \quad \Delta y = b \Delta v + c \Delta w,$$

$$(4) \quad \Delta y_b = b \Delta v_b + c \Delta w_b.$$

Multipliant les deux membres de l'égalité (4) par  $\frac{1}{\Delta v_b} \Delta v$  et retranchant membre à membre de l'égalité (3'), j'obtiens la formule

$$(5) \quad \Delta y - \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v = c \left( \Delta w - \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \Delta v \right),$$

que j'écris, toujours avec Cauchy,

$$(5') \quad \Delta^2 y = c \Delta^2 w.$$

Je forme cette égalité pour chacune des  $n$  observations et j'en déduis, pour déterminer la seule inconnue restante  $c$ , l'équation résultante

$$(6) \quad \Delta^2 y_c = c \Delta^2 w_c.$$

Les équations résultantes (2), (4) et (6) déterminent les trois

inconnues  $a, b, c$ . Il vient ainsi, pour les formules de résolution,

$$(C) \quad \begin{cases} c = \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c}, \\ b = \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b}, \\ a = \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a}. \end{cases}$$

Les différences entre l'observation et la théorie s'obtiennent en écrivant pour les  $n$  observations la formule

$$\Delta^2 y = \Delta^2 y - \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w.$$

Elles offrent les vérifications

$$\Delta^2 y_a = 0, \quad \Delta^2 y_b = 0, \quad \Delta^2 y_c = 0.$$

Si ces différences ne présentent pas les caractères d'erreurs accidentelles, on ajoute un terme aux équations précédentes et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne des différences qui satisfassent à cette condition. La loi de formation des diverses équations est d'ailleurs mise en évidence; pour ne pas alourdir les explications suivantes, je supposerai la formule (1) limitée à trois termes.

## § II. — Généralisation des formules de Cauchy. Adaptation de ces formules à la méthode des moindres carrés.

7. Dans le but de donner plus de généralité aux formules, je remplace les poids  $+1$  et  $-1$  de Cauchy par des poids arbitraires; dès lors l'équation

$$(2) \quad y_a = au_a + bv_a + cw_a \quad (\text{p. 10, n° 6})$$

représente telle combinaison que l'on veut des  $n$  égalités (1). De même, les équations (4) et (6) (p. 10, n° 6) représentent telles autres combinaisons que l'on veut des égalités (3') et (5') et, par suite, des

égalités (1) d'où elles sont déduites. En conséquence, les formules (C) qu'on tire des équations (2), (4), (6) donnent les valeurs des inconnues qui résultent de trois combinaisons arbitraires des égalités (1); autrement dit, si l'on dispose convenablement des poids arbitraires, on peut faire représenter aux formules (C) telles combinaisons que l'on veut des observations; ces formules renferment donc toutes les solutions imaginables et, en particulier, celle des moindres carrés.

8. Or voici cette solution :

Multiplier les deux membres de chacune des égalités (1) par le multiplicateur  $u$  de  $a$  dans cette égalité et ajouter membre à membre les égalités obtenues; on aura une première équation résultante relative à  $a$ . Former de même deux autres équations relatives à  $b$  et  $c$  à l'aide de poids égaux aux valeurs observées de  $v$  et  $w$ . Si je désigne par les indices  $a$ ,  $b$  et  $c$  les valeurs résultantes formées de ces trois manières, les trois équations obtenues pour déterminer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  s'écrivent

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & y_a = au_a + bv_a + cw_a, \\ (\beta) \quad & y_b = au_b + bv_b + cw_b, \\ (\gamma) \quad & y_c = au_c + bv_c + cw_c. \end{aligned}$$

Par cette solution, la somme des carrés des écarts entre l'observation et le calcul est rendue minimum, et la probabilité de l'apparition simultanée de ces écarts, maximum. Je me contente de rappeler ces résultats bien connus.

9. Pour ramener les équations ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) aux formules de Cauchy généralisées, je tire  $a$  de la première et je porte la valeur obtenue dans les deux autres; il vient

$$\begin{aligned} (\alpha)_1 \quad & a = \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a}, \\ (\beta)_1 \quad & y_b = \left( \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a} \right) u_b + bv_b + cw_b, \\ (\gamma)_1 \quad & y_c = \left( \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a} \right) u_c + bv_c + cw_c. \end{aligned}$$

L'équation  $(\beta)_1$  s'écrit, en ordonnant par rapport à  $b$  et  $c$ ,

$$y_b - \frac{y_a}{u_a} u_b = b \left( v_b - \frac{v_a}{u_a} u_b \right) + c \left( w_b - \frac{w_a}{u_a} u_b \right).$$

Or je remarque que  $y_b - \frac{y_a}{u_a} u_b$  représente la différence

$$\sum_{i=1}^{i=n} y_i v_i - \frac{y_a}{u_a} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left( y_i - \frac{y_a}{u_a} u_i \right) v_i$$

qui s'écrit avec les notations adoptées  $\sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i v_i$  ou encore  $\Delta y_b$ .

De cette façon, les équations  $(\beta)_1$ ,  $(\gamma)_1$  prennent la forme

$$(\beta)_2 \quad \Delta y_b = b \Delta v_b + c \Delta w_b,$$

$$(\gamma)_2 \quad \Delta y_c = b \Delta v_c + c \Delta w_c.$$

Je tire  $b$  de l'équation  $(\beta)_2$  et je porte la valeur obtenue dans l'équation  $(\gamma)_2$ . J'obtiens de la même manière que dans la première substitution

$$(\beta)_3 \quad b = \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b},$$

$$(\gamma)_3 \quad \Delta^2 y_c = c \Delta^2 w_c.$$

D'après les formules  $(\gamma)_3$ ,  $(\beta)_3$ ,  $(\alpha)_1$ , les formules de résolution sont, comme dans la méthode de Cauchy,

$$(C) \quad \begin{cases} c = \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c}, \\ b = \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b}, \\ a = \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a}. \end{cases}$$

10. Le calcul se fera de même et présentera les mêmes vérifications : il n'y aura de différence que dans la manière de former les valeurs résultantes; mais cette différence est essentielle, car les poids



### 3° Calcul des coefficients.

.....,

$$c = \frac{\Delta^2 \gamma_c}{\Delta^2 w_c} - \dots,$$

$$b = \frac{\Delta \gamma_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} - \dots,$$

$$a = \frac{\gamma_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a} - \dots$$

4° *Erreurs moyennes.* — Les erreurs sur les observations de  $\gamma$  sont données par les dernières différences formées. L'erreur sur  $\gamma_i$  étant  $r_{li}$ , l'erreur moyenne pour  $m$  équations à  $p$  inconnues est, comme on sait,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \eta_i^2}{m - p}}.$$

Ces formules sont aussi bien applicables aux deux méthodes; mais celle des moindres carrés permet en outre d'évaluer simplement les erreurs moyennes qui en résultent pour les valeurs des inconnues  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , .... Ces erreurs sont données par les formules suivantes (1), où chaque lettre grecque représente l'erreur de la lettre romaine correspondante

.....,

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon^2}{\Delta^2 w_c} + \dots,$$

$$\beta^2 = \frac{\varepsilon^2}{\Delta v_b} + \gamma^2 \left( \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \right)^2 + \dots,$$

$$\alpha^2 = \frac{\varepsilon^2}{u_a} + \beta^2 \left( \frac{v_a}{u_a} \right)^2 + \gamma^2 \left( \frac{w_a}{u_a} \right)^2 + \dots$$

12. A titre d'exemple et dans un but de comparaison, je vais appliquer les deux méthodes au calcul des formules de dispersion pour le rayon ordinaire du quartz. Les résultats seront d'ailleurs utilisés

---

(1) Voir la démonstration de ces formules, n° 19.

dans la suite. J'emploierai pour ces calculs les valeurs inscrites dans le Tableau suivant où la première ligne indique la raie du spectre; la deuxième, la longueur d'onde  $\lambda$ ; la troisième, l'indice ordinaire  $n$ ; la quatrième, l'erreur moyenne  $\varepsilon$ .

|                     | A.              | a.              | B.              | C.              | D.              |
|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\lambda$ .....     | 0 $\mu$ ,760 40 | 0 $\mu$ ,718 36 | 0 $\mu$ ,686 74 | 0 $\mu$ ,656 21 | 0 $\mu$ ,588 91 |
| $n$ .....           | 1,539 19        | 1,540 17        | 1,541 00        | 1,541 90        | 1,544 25        |
| $\varepsilon$ ..... | $\pm$ 0,8       | $\pm$ 0,4       | $\pm$ 0,6       | $\pm$ 0,8       | $\pm$ 0,6       |

|                     | E.              | F.              | G.              | h.              | II.             |
|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\lambda$ .....     | 0 $\mu$ ,526 90 | 0 $\mu$ ,486 07 | 0 $\mu$ ,432 56 | 0 $\mu$ ,410 12 | 0 $\mu$ ,396 72 |
| $n$ .....           | 1,547 17        | 1,549 69        | 1,554 13        | 1,556 50        | 1,558 16        |
| $\varepsilon$ ..... | $\pm$ 0,4       | $\pm$ 0,4       | $\pm$ 0,8       | $\pm$ 0,7       | $\pm$ 1,7       |

Ces déterminations d'indices, dues à M. Macé de Lépinay <sup>(1)</sup>, ont été faites avec une très grande précision et m'ont paru mériter plus de confiance que les mesures faites antérieurement. J'ai adopté, pour la formule de dispersion, la forme <sup>(2)</sup>

$$\frac{1}{n^2} = a + bt^{-2} + ct^2 \dots,$$

dans laquelle  $n$  représente l'indice;  $t = \frac{\lambda}{n}$  est la longueur d'onde dans le cristal, quotient de la longueur d'onde dans le vide par l'indice;  $a, b, c, \dots$  sont les coefficients à déterminer. Les valeurs de  $\frac{1}{n^2}, t^{-2}, t^2$  se calculent facilement au moyen des données précédentes  $n$  et  $\lambda$ . Elles représentent les valeurs de  $\gamma, \nu, w$  des formules générales (n° 11). On doit faire ici  $u = 1$ . Je donnerai d'abord le calcul par la méthode de Cauchy, puis le calcul par celle des moindres carrés; les premières différences étant les mêmes dans les deux méthodes, je ne répéterai pas cette partie du calcul dans la deuxième.

<sup>(1)</sup> *Journal de Physique*, avril 1887.

<sup>(2)</sup> Voir plus loin, Chap. II, § I.



13. Voici le calcul d'une formule de dispersion pour le rayon ordinaire du quartz, par la méthode de Cauchy :

1° *Calcul des différences.*

| Raies.  | $\gamma = \frac{1}{n^2}$ . | $\Delta\gamma$ . | $-\frac{\Delta\gamma_b}{\Delta\nu_b} \Delta\nu$ . | $\Delta^2\gamma$ . | $-\frac{\Delta^2\gamma_c}{\Delta^2\nu_c} \Delta^2\nu$ . | $\Delta^3\gamma$ . |
|---------|----------------------------|------------------|---|--------------------|---|--------------------|
| A.....  | 0,422101                   | + 4345           | - 4191  | + 154              | - 153   | + 1                |
| a.....  | 0,421563                   | + 3807           | - 3742  | + 65               | - 62  | + 3                |
| B.....  | 0,421109                   | + 3353           | - 3349  | + 4                | - 4   | 0                  |
| C.....  | 0,420618                   | + 2862           | - 2913  | - 51               | + 45  | - 6                |
| D.....  | 0,419338                   | + 1582           | - 1696  | - 114              | + 118   | + 4                |
| E.....  | 0,417757                   | + 1              | - 128   | - 127              | + 132   | + 5                |
| F.....  | 0,416400                   | - 1356           | - 1257  | - 99               | + 104   | + 5                |
| G'..... | 0,414025                   | - 3731           | + 3721  | - 10               | + 5   | - 5                |
| h.....  | 0,412764                   | - 4992           | + 5063  | + 71               | - 65  | + 6                |
| H.....  | 0,411885                   | - 5871           | + 5981  | + 110              | - 117   | - 7                |

$$\frac{\gamma_a}{u_a} = 0,417756 \quad \Delta\gamma_b = -28961 \quad \Delta^2\gamma_c = + 805$$

$$\frac{\Delta\gamma_b}{\Delta\nu_b} = -0,0008979, \quad \frac{\Delta^2\gamma_c}{\Delta^2\nu_c} = +0,00480.$$

| Raies. | $\nu = t^{-1}$ . | $\Delta\nu$ . | $w = \nu^2$ . | $\Delta w$ . | $-\frac{\Delta w_b}{\Delta\nu_b} \Delta\nu$ . | $\Delta^2 w$ . |
|--------|------------------|---------------|---------------|--------------|---|----------------|
| A..    | 4,097            | - 4,668       | 0,2440        | +0,1027      | -0,0708                                       | +0,0319        |
| a..    | 4,597            | - 4,168       | 0,2175        | +0,0762      | -0,0632                                       | +0,0130        |
| B..    | 5,035            | - 3,730       | 0,1986        | +0,0573      | -0,0565                                       | +0,0008        |
| C..    | 5,521            | - 3,244       | 0,1811        | +0,0398      | -0,0491                                       | -0,0093        |
| D..    | 6,876            | - 1,889       | 0,1454        | +0,0041      | -0,0286                                       | -0,0245        |
| E..    | 8,622            | - 0,143       | 0,1160        | -0,0253      | +0,0022                                       | -0,0275        |
| F..    | 10,165           | + 1,400       | 0,0984        | -0,0429      | +0,0212                                       | -0,0217        |
| G'..   | 12,909           | + 4,144       | 0,0775        | -0,0638      | +0,0627                                       | -0,0011        |
| h...   | 14,404           | + 5,639       | 0,0694        | -0,0719      | +0,0854                                       | +0,0135        |
| H..    | 15,426           | + 6,661       | 0,0648        | -0,0765      | +0,1008                                       | +0,0243        |

$$\frac{\nu_a}{u_a} = 8,765 \quad \Delta\nu_b = 32,254 \quad \frac{w_a}{u_a} = 0,1413 \quad \Delta w_b = -0,4882 \quad \Delta^2 w_c = +0,1676$$

2° *Calcul des coefficients.*

$$\frac{\Delta^2\gamma_c}{\Delta^2\nu_c} = +0,00480 \quad \frac{\Delta\gamma_b}{\Delta\nu_b} = -0,0008979 \quad \frac{\gamma_a}{u_a} = +0,417756$$

$$-c \frac{\Delta w_b}{\Delta\nu_b} = +0,0000727 \quad -b \frac{\nu_a}{u_a} = +0,007233$$

$$-c \frac{w_a}{u_a} = -0,000678$$

$$c = +0,00480$$

$$b = -0,0008252$$

$$a = +0,424311$$

14. Voici le même calcul fait par la méthode des moindres carrés :

1° *Calcul des différences.* — Les colonnes poids indiquent les multiplicateurs approchés que j'ai substitués aux multiplicateurs exacts.

| Raies.                   | $\Delta y.$ | Poids.        | $-\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v.$ | $\Delta^2 y.$ | Poids<br>en 0,01. | $-\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} \Delta w.$ | $\Delta^3 y.$ |
|--------------------------|-------------|---------------|--|---------------|-------------------|--|---------------|
| A .....                  | +0,004345   | $\times -4,7$ | -4180                                      | + 165         | $\times +3,4$     | -162   | +3            |
| a .....                  | +0,003807   | -4            | -3733                                      | + 74          | +1,5              | - 71   | +3            |
| B .....                  | +0,003353   | -3,7          | -3340                                      | + 13          | 0                 | - 13   | 0             |
| C .....                  | +0,002862   | -3            | -2905                                      | - 43          | 0                 | + 36   | -7            |
| D .....                  | +0,001582   | -2            | -1692                                      | - 110         | -2,3              | +110   | 0             |
| E .....                  | +0,000001   | 0             | - 128                                      | - 127         | -2,7              | +129   | +2            |
| F .....                  | -0,001356   | +1            | +1254                                      | - 102         | -2,2              | +105   | +3            |
| G' .....                 | -0,003731   | +4            | +3711                                      | - 20          | 0                 | + 15   | -5            |
| h .....                  | -0,004992   | +5,6          | +5050                                      | + 58          | +1,0              | - 49   | +9            |
| H .....                  | -0,005871   | +6,7          | +5965                                      | + 94          | +2,0              | - 98   | -4            |
| $\Delta y_b = -0,143375$ |             |               | $100 \Delta^2 y_c = +1738$                 |               |                   |  |               |

$$\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} = -0,00089551, \quad \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} = +0,00470.$$

| Raies.                 | $\Delta v.$ | Poids.        | $\Delta w.$            | $-\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \Delta v.$ | $\Delta^2 w.$                | Poids<br>en 0,01. |
|------------------------|-------------|---------------|------------------------|--|------------------------------|-------------------|
| A .....                | - 4,668     | $\times -4,7$ | +0,1027                | -682                                       | +0,0345                      | $\times +3,4$     |
| a .....                | - 4,168     | -4            | +0,0762                | -610                                       | +0,0152                      | +1,5              |
| B .....                | - 3,730     | -3,7          | +0,0573                | -545                                       | +0,0028                      | 0                 |
| C .....                | - 3,244     | -3            | +0,0398                | -474                                       | -0,0076                      | 0                 |
| D .....                | - 1,889     | -2            | +0,0041                | -276                                       | -0,0235                      | -2,3              |
| E .....                | - 0,143     | 0             | -0,0253                | - 21                                       | -0,0274                      | -2,7              |
| F .....                | + 1,400     | +1            | -0,0429                | +205                                       | -0,0224                      | -2,2              |
| G' .....               | + 4,144     | +4            | -0,0638                | +606                                       | -0,0032                      | 0                 |
| h .....                | + 5,639     | +5,6          | -0,0719                | +824                                       | +0,0105                      | +1,0              |
| H .....                | + 6,661     | +6,7          | -0,0765                | +973                                       | +0,0208                      | +2,0              |
| $\Delta v_b = 160,106$ |             |               | $\Delta w_b = -2,3404$ |  | $100 \Delta^2 w_c = +0,3695$ |                   |

$$\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} = -0,014618.$$

2° *Calcul des coefficients a, b, c.*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} &= +0,00470 & \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} &= -0,0008955 & \frac{y_a}{u_a} &= +0,417756 \\ -c \frac{\Delta v_b}{\Delta v_b} &= +0,0000687 & -b \frac{v_a}{u_a} &= +0,007247 & -c \frac{w_a}{v_a} &= -0,000664 \\ c &= +0,00470 & b &= -0,0008268 & a &= +0,424339 \end{aligned}$$

3° *Erreurs moyennes.* — Je les évalue en unités du sixième chiffre décimal.

| Raies.   | $\tau_i^2$ .                                |  |   |  |
|----------|---|--|---|--|
| A .....  | 9   |  |   |  |
| a .....  | 9   |  |   |  |
| B .....  | 0   |  |   |  |
| C .....  | 49  |  |   |  |
| D .....  | 0   |  |   |  |
| E .....  | 4   |  |   |  |
| F .....  | 9   |  |   |  |
| G' ..... | 25  |  |   |  |
| h .....  | 81  |  |   |  |
| H .....  | 16  |  |   |  |
|          | $\Sigma \tau_i^2 = 202$                     | $\varepsilon^2 = 29$   | $\varepsilon = \pm 5,4$                           |  |
|          | $\frac{\varepsilon^2}{\Delta^2 w_c} = 8000$ | $\frac{\varepsilon^2}{\Delta v_b} = 0,18$                        | $\frac{\varepsilon^2}{u_a} = 2,9$                 |  |
|          |   | $\gamma^2 \left( \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \right)^2 = 1,70$ | $\beta^2 \left( \frac{v_a}{u_a} \right)^2 = 1,46$ |  |
|          |   |  | $\gamma^2 \left( \frac{w_a}{u_a} \right)^2 = 160$ |  |
|          | $\gamma^2 = 8000$                           | $\beta^2 = 1,9$  | $\alpha^2 = 309$                                  |  |
|          | $\gamma = \pm 90$                           | $\beta = \pm 1,4$  | $\alpha = \pm 17$                                 |  |

En résumé, les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés sont les suivants :

$$\varepsilon = \pm 5,4,$$

$$c = + 0,00470, \quad b = - 0,0008268, \quad a = + 0,424339.$$

$$\pm 9 \quad \pm 14 \quad \pm 17$$

Comme on va voir, ce calcul n'est pas absolument correct, parce qu'on n'a pas tenu compte de ce que l'auteur des mesures a fait connaître l'erreur moyenne de chaque détermination.

#### § IV. — Cas de la précision variable; formules complémentaires.

15. La solution précédente des moindres carrés suppose que toutes les observations ont été exécutées avec la même précision. Cette hypothèse, qui peut être quelquefois suffisamment vérifiée, est, dans certains cas, très contraire à la vérité. Je considère le cas de la préci-

sion variable qui a été traité par Gauss : je suppose que la valeur  $y_i$  soit la moyenne de plusieurs mesures, de façon qu'on connaisse l'erreur moyenne  $\varepsilon_i$  et, par suite, le *poids*  $h_i = \frac{1}{\varepsilon_i^2}$  de  $y_i$ .

La solution qui rend maximum la probabilité des écarts qui en résultent entre l'observation et le calcul est donnée par les équations

$$(\alpha)' \quad \Sigma h_i u_i \times y_i = a \Sigma h_i u_i \times u_i + b \Sigma h_i u_i \times v_i + c \Sigma h_i u_i \times w_i,$$

$$(\beta)' \quad \Sigma h_i v_i \times y_i = a \Sigma h_i v_i \times u_i + b \Sigma h_i v_i \times v_i + c \Sigma h_i v_i \times w_i,$$

$$(\gamma)' \quad \Sigma h_i w_i \times y_i = a \Sigma h_i w_i \times u_i + b \Sigma h_i w_i \times v_i + c \Sigma h_i w_i \times w_i,$$

où les sommes  $\Sigma$  s'étendent de  $i = 1$  à  $i = n$ . Ces équations peuvent s'écrire comme les équations  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (n° 8). Les mêmes transformations (n° 9) s'y appliquent et, par suite, aussi les formules définitives C (n° 9). Seulement  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  représenteront, non plus  $\Sigma u_i X_i$ ,  $\Sigma v_i X_i$ ,  $\Sigma w_i X_i$ , mais  $\Sigma h_i u_i X_i$ ,  $\Sigma h_i v_i X_i$ ,  $\Sigma h_i w_i X_i$ .

16. THÉORÈME. — *On peut, sans changer la valeur de la différence  $\Delta^p X$ , intervertir l'ordre des lettres par rapport auxquelles sont prises les différences.*

Pour indiquer par la notation l'ordre de ces différences, je pose,  $X$  désignant une variable quelconque,

$$(1) \quad X - \frac{X_a}{u_a} u = \Delta_a X, \quad X - \frac{X_b}{v_b} v = \Delta_b X,$$

$$(2) \quad \Delta_a X - \frac{[\Delta_a X]_b}{[\Delta_a v]_b} \Delta_a v = \Delta_b (\Delta_a X) = \Delta_{ab}^2 X.$$

Je calcule  $\Delta_{ab}^2 X$  afin de vérifier que cette expression est symétrique par rapport à  $u$  et  $v$ ,  $a$  et  $b$ .

On a, d'après les notations,

$$(3) \quad \Delta_a X = X - \frac{X_a}{u_a} u$$

et, par suite,

$$(4) \quad [\Delta_a X]_b = X_b - \frac{X_a}{u_a} u_b = \frac{1}{u_a} [u_a X_b - X_a u_b].$$

On a de même, en remplaçant  $X$  par  $v$ ,

$$\Delta_a v = v - \frac{v_a}{u_a} u, \quad [\Delta_a v]_b = \frac{1}{u_a} (u_a v_b - v_a u_b).$$

Portant ces valeurs dans l'expression de  $\Delta_{ab}^2 X$ , il vient

$$\Delta_{ab}^2 X = X - \frac{X_a}{u_a} u - \frac{u_a X_b - X_a u_b}{u_a v_b - v_a u_b} \left( v - \frac{v_a}{u_a} u \right).$$

Le coefficient du terme en  $u$ , dans cette expression, est

$$-\frac{X_a}{u_a} + \frac{u_a X_b - X_a u_b}{u_a v_b - v_a u_b} \times \frac{v_a}{u_a} = \frac{v_a X_b - v_b X_a}{u_a v_b - v_a u_b}.$$

J'obtiens ainsi

$$\Delta_{ab}^2 X = X + \frac{v_a X_b - v_b X_a}{u_a v_b - v_a u_b} u + \frac{u_b X_a - u_a X_b}{u_a v_b - v_a u_b} v.$$

Cette expression est bien symétrique par rapport à  $u$  et  $v$ ,  $a$  et  $b$ , et l'on a l'identité symbolique

$$(5) \quad \Delta_{ab}^2 = \Delta_{ba}^2.$$

Il en résulte plus généralement que la différence  $\Delta_{abc\dots l}^p$  est indépendante de l'ordre des indices.

G. Q. F. D.

17. THÉORÈME. — On a

$$\sum h. \Delta^p X. \Delta^p Y = \sum h X. \Delta^p Y = \sum h Y. \Delta^p X.$$

*Les signes  $\Sigma$  s'étendent aux valeurs de 1 à  $n$  données à l'indice  $i$  qui a été supprimé ici pour simplifier l'écriture.*

Je considère d'abord les différences du premier ordre.

J'ai la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \sum h. \Delta_a X. \Delta_a Y &= \sum h \left( X - \frac{X_a}{u_a} u \right) \left( Y - \frac{Y_a}{u_a} u \right) \\ &= \sum h X \left( Y - \frac{Y_a}{u_a} u \right) - \frac{X_a}{u_a} \sum h u \left( Y - \frac{Y_a}{u_a} u \right) \\ &= \sum h X. \Delta_a Y - \frac{X_a}{u_a} \left( Y_a - \frac{Y_a}{u_a} u_a \right) \end{aligned}$$

et, en remarquant que le second terme de cette expression est nul,

$$\sum h . \Delta_a X . \Delta_a Y = \sum h X . \Delta_a Y.$$

J'obtiens ainsi

$$(6) \quad \sum h . \Delta_a X . \Delta_a Y = \sum h X . \Delta_a Y = \sum h Y . \Delta_a X.$$

J'étends ensuite cette formule aux différences d'ordre plus élevé. Je considère, par exemple, les différences du troisième ordre.

J'ai la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \sum h . \Delta_{abc}^3 X . \Delta_{abc}^3 Y &= \sum h . \Delta_c (\Delta_{ab}^2 X) . \Delta_c (\Delta_{ab}^2 Y), & \text{d'après les notations,} \\ &= \sum h . \Delta_{ab}^2 X . \Delta_c (\Delta_{ab}^2 Y), & \text{d'après l'identité (6),} \\ &= \sum h . \Delta_b (\Delta_a X) . \Delta_b (\Delta_{ac}^2 Y), & \text{d'après l'identité (5),} \\ &= \sum h . \Delta_a X . \Delta_b (\Delta_{ac}^2 Y), & \text{d'après l'identité (6),} \\ &= \sum h . \Delta_a X . \Delta_a (\Delta_{bc}^2 Y), & \text{d'après l'identité (5).} \end{aligned}$$

J'applique encore une fois les identités (6) et (5).

J'obtiens, en définitive, la formule

$$\sum h . \Delta_{abc}^3 X . \Delta_{abc}^3 Y = \sum h X . \Delta_{abc}^3 Y.$$

De même, le premier membre a aussi pour valeur  $\sum h Y . \Delta_{abc}^3 X$ .

C. Q. F. D.

18. Le second théorème (n° 17) montre que, pour calculer  $\Delta^2 X_c$ , par exemple, on peut appliquer aux  $\Delta^2 X$  les masses  $h \Delta^2 \omega$  au lieu des masses  $h \omega$ , ce qui est généralement plus avantageux pour le calcul ; car on évite ainsi des termes négatifs qui se présenteraient dans la somme  $\sum h \omega \Delta^2 X$ , tandis que tous les termes de la somme  $\sum h . \Delta^2 \omega . \Delta^2 X$  sont positifs. De plus, les coefficients se groupent mieux, de façon qu'on peut souvent appliquer un coefficient moyen à la somme de plusieurs  $\Delta^2 X$ . Enfin ce mode de calcul se rapproche davantage de la méthode de Cauchy, ce qui facilite la comparaison des deux méthodes. Pour ces raisons, je l'ai appliqué dans l'exemple précédent (n° 14).

19. Voici un artifice basé sur le théorème précédent, et par lequel

on peut établir intuitivement les formules des erreurs moyennes sur les résultats. Soit à évaluer l'erreur du terme  $\frac{\Delta^2 \gamma_c}{\Delta^2 w_c}$ .

On a, par l'application du théorème (n° 17),

$$\frac{\Delta^2 \gamma_c}{\Delta^2 w_c} = \frac{\sum h \cdot \Delta^2 w \cdot \Delta^2 \gamma}{\sum h (\Delta^2 w)^2}.$$

On reconnaît là l'expression de la moyenne des valeurs  $\frac{\Delta^2 \gamma}{\Delta^2 w}$  affectées des poids  $h(\Delta^2 w)^2$ . Le poids de la moyenne est donc

$$\sum h (\Delta^2 w)^2 = \Delta^2 w_c$$

et le carré de son erreur moyenne est  $\frac{1}{\Delta^2 w_c}$ .

On en conclut, pour les erreurs commises sur les quantités,

$$c = \frac{\Delta^2 \gamma_c}{\Delta^2 w_c}, \quad b = \frac{\Delta \gamma_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b}, \quad a = \frac{\gamma_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a},$$

les formules

$$\gamma^2 = \frac{1}{\Delta^2 w_c}, \quad \beta^2 = \frac{1}{\Delta v_b} + \gamma^2 \left( \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \right)^2, \quad \alpha^2 = \frac{1}{u_a} + \beta^2 \left( \frac{v_a}{u_a} \right)^2 + \gamma^2 \left( \frac{w_a}{u_a} \right)^2.$$

Je viens de traiter le cas où  $h = \frac{1}{\varepsilon^2}$  est variable; s'il est constant, il se met en facteur dans l'expression du poids  $\sum h (\Delta^2 w)^2$  qui devient  $\frac{\sum (\Delta^2 w)^2}{\varepsilon^2}$  et s'écrit, dans ce cas, avec les notations correspondantes,  $\frac{\Delta^2 w_c}{\varepsilon^2}$ .

On trouve ainsi les formules précédemment données (n° 11).

20. Je vais maintenant justifier cette simplification par laquelle on remplace les poids exacts par des valeurs grossièrement approchées.

Les multiplicateurs  $h_i u_i = \frac{u_i}{\varepsilon_i^2}$  ne comportent pas une plus grande précision que les facteurs  $\frac{1}{\varepsilon_i^2}$ . Or, si l'on se reporte aux nombres de M. Macé de Lépinay (n° 12), on voit que l'erreur relative de  $\frac{1}{\varepsilon_i^2}$  monte au moins à 0,1; il serait donc illusoire de calculer  $\frac{u_i}{\varepsilon_i^2}$  avec une plus grande

approximation. Il y a plus : si l'auteur avait omis de donner les valeurs de  $\varepsilon$  ou, *a fortiori*, s'il n'avait fait qu'une mesure de  $n$  pour chaque radiation, on devrait, faute de mieux, supposer tous les  $\varepsilon$  égaux et employer les multiplicateurs  $u_i$  comme je l'ai fait dans le calcul précédent (n° 14). Ces poids sont erronés des facteurs  $\frac{1}{\varepsilon_i^2}$  dont les rapports varient de 1 à 16. Quel intérêt y aurait-il alors à employer, par exemple, le multiplicateur 5274 au lieu de 5000, quand ce multiplicateur peut être erroné de seize fois sa valeur? Ces remarques s'étendent à toutes les mesures, tout particulièrement aux observations astronomiques, où la précision des pointés dépend de tant de circonstances variables.

21. Il me reste à calculer la perte de poids dont sont affectés les résultats par la substitution des valeurs approchées aux multiplicateurs exacts. Soient deux déterminations  $a_1$  et  $a_2$  de poids  $p_1$  et  $p_2$ . Désignant par  $M$  la moyenne proprement dite et par  $P$  son poids, on aura

$$(1) \quad M = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2}{p_1 + p_2}, \quad P = p_1 + p_2.$$

Si, au lieu des poids  $p_1$  et  $p_2$ , on emploie pour multiplicateurs  $p_1 x_1$  et  $p_2 x_2$ , on aura une nouvelle moyenne

$$M' = \frac{a_1 p_1 x_1 + a_2 p_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2}.$$

J'évalue le poids de cette détermination.

J'ai successivement, le poids étant l'inverse du carré de l'erreur moyenne,

|   |  |
|---|--|
| Carré de l'erreur moyenne sur $a_1$ .....                     | $\frac{1}{p_1},$                                       |
| » $a_1 p_1 x_1$ .....   | $\frac{1}{p_1} (p_1 x_1)^2 = p_1 x_1^2,$               |
| » $a_2 p_2 x_2$ .....   | $\frac{1}{p_2} (p_2 x_2)^2 = p_2 x_2^2,$               |
| » $a_1 p_1 x_1 + a_2 p_2 x_2$ .....                           | $p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2,$                               |
| » $\frac{a_1 p_1 x_1 + a_2 p_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2}$ ..... | $\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2}{(p_1 x_1 + p_2 x_2)^2}.$ |



J'obtiens, pour la nouvelle moyenne, les formules

$$(2) \quad M' = \frac{a_1 p_1 x_1 + a_2 p_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2}, \quad P' = \frac{(p_1 x_1 + p_2 x_2)^2}{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2} = f(x_1, x_2).$$

Elles reproduisent les formules (1) quand on y remplace les  $x$  par l'unité. Je calcule l'accroissement  $\Delta P = \Delta f(x_1, x_2)$  obtenu en augmentant de  $dx_1$  et  $dx_2$  ces valeurs égales à l'unité. J'écris, en bornant l'approximation au second ordre,

$$\Delta P = df + \frac{d^2 f}{2}.$$

Je pose

$$f(x_1, x_2) = \frac{X}{Y}, \quad X = (p_1 x_1 + p_2 x_2)^2, \quad Y = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2;$$

il vient

$$\begin{aligned} df &= dX \cdot Y^{-1} + X \cdot dY^{-1}, \\ d^2 f &= d^2 X \cdot Y^{-1} + 2 dX \cdot dY^{-1} + X \cdot d^2 Y^{-1}, \\ dX &= 2(p_1 x_1 + p_2 x_2)(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \\ d^2 X &= 2(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2, \\ dY^{-1} &= -2(p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2)^{-2}(p_1 x_1 dx_1 + p_2 x_2 dx_2), \\ d^2 Y^{-1} &= 4(p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2)^{-3}(p_1 x_1 dx_1 + p_2 x_2 dx_2)^2 \\ &\quad - 2(p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2)^{-2}(p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2). \end{aligned}$$

Faisant  $x_1 = x_2 = 1$  et remplaçant  $p_1 + p_2$  par  $P$ , il vient

$$\begin{aligned} X &= P^2, \\ dX &= 2P(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \\ d^2 X &= 2(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2; \\ Y &= P, \\ dY^{-1} &= -2P^{-2}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \\ d^2 Y^{-1} &= 4P^{-3}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2 - 2P^{-2}(p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2) \end{aligned}$$

et, en portant ces valeurs dans les expressions de  $df$  et de  $d^2 f$ ,

$$\begin{aligned} df &= 2P(p_1 dx_1 + p_2 dx_2) P^{-1} - P^2 \cdot 2P^{-2}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \\ d^2 f &= 2(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2 P^{-1} + 2 \cdot 2P(p_1 dx_1 + p_2 dx_2) [-2P^{-2}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)] \\ &\quad + P^2 [4P^{-3}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2 - 2P^{-2}(p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2)]. \end{aligned}$$

J'obtiens, en définitive,

$$df = 0, \quad \frac{1}{2} d^2f = - \frac{(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2}{P} - (p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2).$$

Par ces formules, on vérifie bien que la moyenne  $M$  a le poids maximum; on en déduit, pour la perte relative de ce poids,

$$(3) \quad - \frac{\Delta P}{P} = \left( \frac{p_1 dx_1 + p_2 dx_2}{P} \right)^2 + \frac{p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2}{P}.$$

De plus, dans l'évaluation approchée du poids, on remplace ce poids  $P = p_1 + p_2$  par une valeur erronée justement de  $p_1 dx_1 + p_2 dx_2$ .

L'erreur relative de cette évaluation est

$$(4) \quad \frac{p_1 dx_1 + p_2 dx_2}{P}.$$

Il importe en première ligne que cette erreur ne dépasse pas la limite qu'on s'impose pour l'évaluation du poids, par exemple  $\frac{1}{20}$ . Un coup d'œil suffit pour réaliser cette condition. Dès lors les termes de la formule (3) sont négligeables devant le terme (4), et l'on sera certain que l'inexactitude du calcul n'entraîne pas sur le poids même du résultat ni sur son évaluation une erreur relative égale à  $\frac{1}{20}$ . Ces erreurs sont bien inférieures, comme je l'ai expliqué, à l'erreur imposée par la nature même de la question.

Pour simplifier, j'ai considéré seulement la moyenne de deux déterminations; mais, quel que soit leur nombre, la démonstration subsiste, et le problème général de l'interpolation se ramène par mes formules à des questions de moyennes.

22. Comme application, je traite par la méthode de Gauss le problème précédemment traité par la méthode de Cauchy; seulement, pour simplifier les calculs, je prends pour inconnues les corrections  $\alpha'$ ,  $b'$ ,  $c'$  qu'il faut porter aux résultats fournis par la méthode de Cauchy (n° 13). De cette façon,  $\gamma$  représentera non plus  $\frac{1}{n^2}$ , mais la différence entre la valeur calculée et la valeur observée de  $\frac{1}{n^2}$ . Les valeurs de cette différence sont empruntées à la colonne  $\Delta^3 \gamma$  (n° 13); celles de  $\varepsilon$

sont les données de M. Macé de Lépinay (n° 12). Ces valeurs se rapportent, il est vrai, à  $n$ ; mais, à cause de la faible variation de l'indice dans le spectre visible, les erreurs de  $\frac{1}{n^2}$  leur sont sensiblement proportionnelles. Il suffira, pour avoir les erreurs moyennes sur les résultats, de multiplier les valeurs trouvées pour  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  par la valeur absolue de  $\frac{d}{dn} \frac{1}{n^2}$  qui est  $\frac{2}{n^3} = 5,5$ .

### 1° Calcul des différences.

| Raies. | $\varepsilon$ . | $h$ . | $y$ .                     | $hy$ . | $\Delta y$ . | $\Delta y_b$ .                           | $-\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v$ . | $\Delta^2 y$ .                              | $\frac{\Delta^2 y_c}{\times 100}$ . | $-\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w$ . | $\Delta^2 y$ . |
|--------|-----------------|-------|---------------------------|--------|--------------|--|---|---|-------------------------------------|---|----------------|
| A..... | 0,8             | 1,6   | +1                        | + 1,6  | -1,8         | +10,8                                    | +0,6  | - 1,2                                       | - 6,0                               | +1,7  | +0,5           |
| a..... | 0,4             | 6,2   | +3                        | +18,7  | +0,2         | - 4,2                                    | +0,5  | + 0,7                                       | + 5,6                               | +0,7  | +1             |
| B..... | 0,6             | 2,8   | 0                         | 0      | -2,8         | +22,4                                    | +0,5  | - 2,3                                       | - 0,0                               | +0,1  | -2             |
| C..... | 0,8             | 1,6   | -6                        | - 9,6  | -8,8         | +35,2                                    | +0,4  | - 8,4                                       | + 8,4                               | -0,4  | -9             |
| D..... | 0,6             | 2,8   | +4                        | +11,1  | +1,2         | - 3,6                                    | +0,2  | + 1,4                                       | - 8,4                               | -1,2  | 0              |
| E..... | 0,4             | 6,2   | +5                        | +31,2  | +2,2         | + 8,8                                    | -0,1  | + 2,1                                       | -27,3                               | -1,2  | +1             |
| F..... | 0,4             | 6,2   | +5                        | +31,2  | +2,2         | +30,8                                    | -0,4  | + 1,8                                       | -12,6                               | -0,7  | +1             |
| G'.... | 0,8             | 1,6   | -5                        | - 7,8  | -7,8         | -62,4                                    | -0,8  | - 8,6                                       | -17,2                               | +0,7  | -8             |
| h..... | 0,7             | 2,0   | +6                        | +12,2  | +3,2         | +41,6                                    | -1,0  | + 2,2                                       | +13,2                               | +1,7  | +4             |
| H..... | 1,7             | 0,3   | -7                        | - 2,4  | -9,8         | -29,4                                    | -1,2  | -11,0                                       | -11,0                               | +2,4  | -9             |
|        | $u_a = +31,3$   |       | $y_a = +86,4$             |        |              | $\Delta y_b = +50,0$                     |   | $100 \Delta^2 y_c = -55,3$                  |                                     |   |                |
|        |                 |       | $\frac{y_a}{u_a} = + 2,8$ |        |              | $\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} = + 0,16$ |   | $\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} = -55,4$ |                                     |   |                |

| Raies.  | $\nu = l^{-1}$ . | $h\nu$ .                    | $\Delta\nu$ . | $h\Delta\nu$ . | $\Delta\nu_b$ .        |
|---------|------------------|-----------------------------|---------------|----------------|------------------------|
| A.....  | 4,1              | 6,4                         | -3,9          | - 6            | + 23,4                 |
| a.....  | 4,6              | 28,7                        | -3,4          | -21            | + 71,4                 |
| B.....  | 5,0              | 13,9                        | -3,0          | - 8            | + 24,0                 |
| C.....  | 5,5              | 8,6                         | -2,5          | - 4            | + 10,0                 |
| D.....  | 6,9              | 19,2                        | -1,1          | - 3            | + 3,3                  |
| E.....  | 8,6              | 53,7                        | +0,6          | + 4            | + 2,4                  |
| F.....  | 10,2             | 63,7                        | +2,2          | +14            | + 30,8                 |
| G'..... | 12,9             | 20,2                        | +4,9          | + 8            | + 39,2                 |
| h.....  | 14,4             | 29,4                        | +6,4          | +13            | + 83,2                 |
| H.....  | 15,4             | 5,3                         | +7,4          | + 3            | + 22,2                 |
|         |                  | <hr/>                       |               |                |                        |
|         |                  | $\nu_a = +249,1$            |               |                | $\Delta\nu_b = +309,9$ |
|         |                  | $\frac{\nu_a}{u_a} = + 8,0$ |               |                |                        |

| Raies.           | $w = p.$            | $hw.$  | $\Delta w.$ | $\Delta w_b.$                     | $-\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \Delta v.$ | $\Delta^2 w.$ | $h \Delta^2 w.$      | $\frac{\Delta^2 w}{\times 100.}$ |
|------------------|---------------------|--------|-------------|-----------------------------------|--|---------------|----------------------|----------------------------------|
| A. . . .         | 0,244               | 0,390  | +0,097      | -0,582                            | -0,066                                     | +0,031        | +0,05                | +0,155                           |
| $\alpha$ . . . . | 0,217               | 1,348  | +0,070      | -1,470                            | -0,057                                     | +0,013        | +0,08                | +0,104                           |
| B. . . .         | 0,199               | 0,557  | +0,052      | -0,416                            | -0,051                                     | +0,001        | 0,00                 | 0,000                            |
| C. . . .         | 0,181               | 0,290  | +0,034      | -0,136                            | -0,042                                     | -0,008        | -0,01                | -0,008                           |
| D. . . .         | 0,145               | 0,406  | -0,002      | -0,006                            | -0,019                                     | -0,021        | -0,06                | +0,126                           |
| E. . . .         | 0,116               | 0,719  | -0,031      | -0,124                            | +0,010                                     | -0,021        | -0,13                | +0,273                           |
| F. . . .         | 0,098               | 0,607  | -0,049      | -0,686                            | +0,037                                     | -0,012        | -0,07                | +0,084                           |
| G'. . . .        | 0,077               | 0,124  | -0,070      | -0,560                            | +0,083                                     | +0,013        | +0,02                | +0,026                           |
| $h$ . . . .      | 0,069               | 0,138  | -0,078      | -1,014                            | +0,108                                     | +0,030        | +0,06                | +0,180                           |
| H. . . .         | 0,065               | 0,020  | -0,082      | -0,246                            | +0,125                                     | +0,043        | +0,01                | +0,043                           |
|                  | $w_a =$             | 4,599  |             | $\Delta w_b =$                    | -5,240                                     |               | $100 \Delta^2 w_c =$ | +0,999                           |
|                  | $\frac{w_a}{u_a} =$ | +0,147 |             | $\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} =$ | -0,0169                                    |               |                      |                                  |

2° *Calcul des coefficients et des erreurs moyennes.*

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} &= -55 & \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} &= +0,16 & \frac{y_a}{u_a} &= +2,76 \\
 -c' \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} &= -0,98 & -b' \frac{v_a}{u_a} &= -6,52 & -c' \frac{w_a}{u_a} &= +8,08 \\
 & & & & a' &= +4,32 \\
 c' &= -55 & b' &= -0,82 & & \\
 +0,004800 & & -0,0008252 & & 0,424311 & \\
 c = +0,004745 & & b = -0,0008260 & & a = 0,424315 & \\
 \pm 55 & & \pm 10 & & \pm 11 & \\
 \\ 
 \frac{1}{\Delta^2 w_c} &= 101 & \frac{1}{\Delta v_b} &= 0,003 & \frac{1}{u_a} &= 0,03 \\
 \gamma^2 \left( \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \right)^2 &= 0,029 & \beta^2 \left( \frac{v_a}{u_a} \right)^2 &= 2,02 & \gamma^2 \left( \frac{w_a}{u_a} \right)^2 &= 2,20 \\
 \gamma^2 &= 101 & \beta^2 &= 0,032 & \alpha^2 &= 4,2 \\
 \gamma &= 10 & \beta &= 0,18 & \alpha &= 2,05
 \end{aligned}$$

## § V. — Remarques critiques sur les trois méthodes.

23. Voici le résumé des valeurs que nous avons obtenues pour les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de la formule de dispersion  $\gamma = a + bt^{-2} + ct^2$  et la comparaison des nombres calculés aux observations de M. Mouton <sup>(1)</sup> pour les radiations calorifiques :

*Quartz, rayon ordinaire.*

|                         | $a$ .            | $b$ .             | $c$ .          |
|-------------------------|------------------|-------------------|----------------|
| (1) Cauchy .....        | +0,424311        | -0,0008252        | +0,00480       |
| (2) Moindres carrés ... | +0,424339<br>±17 | -0,0008268<br>±14 | +0,00470<br>±9 |
| (3) Gauss .....         | +0,424315<br>±11 | -0,0008260<br>±10 | +0,00475<br>±6 |

| $\lambda$ . | $n$ .  | $\frac{1}{n^2}$ observé. | $\frac{1}{n^2}$ obs. - $\frac{1}{n^2}$ calc. |      |      |
|-------------|--------|--------------------------|--|------|------|
|             |        |                          | (1).   | (2). | (3). |
| $\mu$       |        |                          |  |      |      |
| 2,14 .....  | 1,5191 | 0,43334                  | -14  | +8   | -3   |
| 1,77 .....  | 1,5247 | 0,43016                  | -2   | +10  | +5   |
| 1,45 .....  | 1,5289 | 0,42780                  | +9   | +15  | +14  |
| 1,08 .....  | 1,5338 | 0,42507                  | +3   | +7   | +6   |
| 0,88 .....  | 1,5371 | 0,42325                  | -12  | -12  | -10  |

Je ne fais pas la même comparaison pour les radiations ultra-violettes, parce qu'elle serait peu significative : on verra, en effet, que ces radiations sont affectées d'un nouveau terme de dispersion.

Voici, d'autre part, les résultats de calculs faits pour le rayon extraordinaire par les trois méthodes et dont j'épargnerai la reproduction au lecteur. On remarquera que la méthode de Cauchy et celle de Gauss ont donné le même résultat.

*Quartz, rayon extraordinaire.*

|                         | $a$ .            | $b$ .             | $c$ .          |
|-------------------------|------------------|-------------------|----------------|
| (1) Cauchy et Gauss ... | +0,419507<br>±11 | -0,0008295<br>±7  | +0,00484<br>±6 |
| (2) Moindres carrés ... | +0,419494<br>±16 | -0,0008288<br>±14 | +0,00489<br>±7 |

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 967, 1078, 1189; 1879.

| $\lambda$ . | $n$    | $\frac{1}{n^2}$ observé. | $\frac{1}{n^2}$ obs. — $\frac{1}{n^2}$ calc. |
|-------------|--------|--------------------------|--|
| $\mu$       |        |                          | (1). — (2).                                  |
| 2,14 .....  | 1,5278 | 0,42842                  | — 15 — 24                                    |
| 1,77 .....  | 1,5335 | 0,42524                  | — 8 — 13                                     |
| 1,45 .....  | 1,5377 | 0,42292                  | + 5 + 2                                      |
| 1,08 .....  | 1,5427 | 0,42018                  | 0 — 1  |
| 0,88 .....  | 1,5460 | 0,41839                  | — 12 — 12                                    |

24. Je constate sur ces nombres les faits suivants :

1° *Rayon ordinaire*. — La formule (3) de Gauss est la plus conforme aux observations de M. Mouton; les formules (1) de Cauchy et (2) des moindres carrés s'en écartent également de part et d'autre.

2° *Rayon extraordinaire*. — La formule (1) que concordent à donner les deux méthodes de Cauchy et de Gauss est nettement meilleure que la formule (2) des moindres carrés.

Pour les deux rayons, les écarts entre les observations de M. Mouton et les formules (1) présentent une uniformité remarquable : il ne serait pas impossible qu'il y eût, sur les radiations extrêmes,  $\lambda = 2^{\mu}, 14$  et  $\lambda = 0^{\mu}, 88$ , des erreurs systématiques voisines de  $-14$  et  $-12$ ; cela est assez vraisemblable aux extrémités du champ observable par la pile thermo-électrique; j'en ai moi-même constaté l'existence quand on met l'écran trop près de la pile. Je vais exposer d'autres remarques basées sur la comparaison des erreurs probables de chaque détermination.

25. Voici le Tableau des erreurs probables données par M. Macé de Lépinay :

| Radiation .....       | A   | $\alpha$ | B   | C   | D   | E   | F   | G'  | $h$ | H   |
|-----------------------|-----|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Rayon ordinaire ..... | 0,8 | 0,4      | 0,6 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 0,8 | 0,7 | 1,7 |
| » extraordinaire..    | 1,2 | 0,9      | 0,7 | 1,0 | 0,5 | 0,8 | 0,5 | 0,7 | 0,5 | 0,4 |

Le hasard n'a-t-il pas une grosse part dans la détermination de ces erreurs? Pourquoi l'indice de la raie H a-t-il pour erreurs moyennes 1,7 et 0,4? Aucune raison ne permet de penser que les pointés ont été quatre fois plus précis pour le rayon extraordinaire que pour le rayon ordinaire, alors que les pointés de la raie  $\alpha$  auraient été deux fois

moins précis dans le premier cas que dans le second. La méthode de Gauss commande d'affecter les observations de poids inversement proportionnels aux carrés de ces nombres si incertains. Quel joueur consentirait à mettre ainsi des enjeux proportionnels aux carrés de nombres dont les rapports peuvent être erronés de huit fois leurs valeurs? Ce serait jouer trop *gros jeu*. Faut-il donc attribuer la variation des erreurs au simple hasard et considérer les observations comme formant une seule série de même erreur moyenne? C'est la méthode des moindres carrés que commande alors le calcul des probabilités. Les résultats nous avertissent que cette solution est la plus *imprudente* des trois. En voici la cause :

Malgré les contradictions signalées, le Tableau précédent donne à penser que les observations extrêmes (A et H) sont les moins précises. Or c'est à ces observations extrêmes que la méthode attribue le poids prépondérant dans le calcul de  $b$  et  $c$ . Ces difficultés d'ordre purement pratique se reproduisent sans doute dans toutes les questions. La précision des observations n'est-elle pas toujours variable et d'une façon à peu près inconnue? N'est-elle pas plus faible pour les éléments extrêmes que nos sens et nos instruments puissent atteindre? S'il en est ainsi, la méthode des moindres carrés n'est jamais applicable; celle de Gauss l'est seulement si l'on connaît la précision des diverses déterminations qui doivent, pour cela, résulter d'un grand nombre de mesures.

26. Il y a plus. Imaginons le cas idéal supposé par la théorie : un observateur habile, nullement impressionnable, a observé un phénomène toujours aussi net, débarrassé de toute erreur systématique, avec un instrument connu, d'un régime parfaitement régulier. La solution *la plus probable* est, d'après la théorie, celle qui rend minimum la somme des carrés des erreurs accidentelles.

« ..... Nous devons signaler d'abord une différence essentielle entre la valeur la plus probable et la meilleure valeur à adopter. » Ainsi s'exprime M. Bertrand dans son admirable *Calcul des probabilités* <sup>(1)</sup>. Voici le développement de cette pensée : « La valeur la plus

---

(1) Page 176.

probable est celle dont la probabilité est la plus grande. Peu important les autres. Elles doivent toutes cependant diriger le choix à faire. S'il est utile d'accroître la probabilité des petites erreurs, il est désirable aussi de diminuer celle des grandes. S'attacher seulement à choisir la valeur la plus probable, c'est imiter le joueur qui, pouvant espérer un grand nombre de gains différents et craindre un grand nombre de pertes, prendrait ses décisions de manière à accroître la chance de gagner le gros lot sans aucunement se soucier des autres.

» En disant : « En présence de plusieurs mesures d'une même » grandeur, le parti le meilleur est d'adopter la moyenne », et « la » moyenne entre plusieurs mesures est la valeur la plus probable », on énonce deux propositions différentes. On a eu tort de les confondre. »

Cela est incontestable. La deuxième proposition qui est le fondement de la théorie des moindres carrés de Gauss est-elle bien certaine? La solution la plus probable a-t-elle même une existence objective? Il y a bien lieu d'en douter : la probabilité d'un écart déterminé dans un système de mesures de précision connue peut être définie et calculée en admettant la loi des écarts de Gauss. C'est une approximation très satisfaisante. Mais les mesures une fois faites, les erreurs sont déterminées quoique inconnues; on n'a pas d'action sur elles. Les valeurs des inconnues sont aussi déterminées; elles ont une existence certaine et non probable. La solution la plus probable, s'il est permis d'employer une pareille expression, est celle qui répond aux valeurs véritables des inconnues, et il y a tout à parier que ces valeurs ne rendent pas minimum la somme des carrés des écarts. J'admets que ces objections sont rejetées. La solution la plus probable a une existence réelle; est-elle la plus prudente à adopter? Pas plus que d'« accroître la chance de gagner le gros lot sans aucunement se soucier des autres », sans se soucier non plus des pertes possibles.

Le premier énoncé, plus vague que le second, est une indication du bon sens : il n'a pas de prétention scientifique. Par mesure de simple *prudence*, on adopte pour la grandeur mesurée la valeur qui laisse la même masse d'écarts de part et d'autre. Ce principe de prudence est rigoureusement conservé dans la méthode de Cauchy; il est violé dans celle des moindres carrés.



27. Soit à déterminer, en effet, le coefficient angulaire  $\alpha$  de la droite

$$(1) \quad y = \alpha u.$$

Pour diverses valeurs exactes de  $u$ , on a mesuré les valeurs approchées de l'ordonnée  $y$  avec la même précision. Le premier principe des moyennes est exactement applicable; la prudence commande d'adopter la valeur de  $\alpha$  qui laisse la même masse d'écarts de  $y$  dans les deux sens. D'après la méthode des moindres carrés, on doit attacher un plus grand poids aux plus grandes valeurs de  $y$  et déplacer la droite fournie par la méthode de Cauchy, pour la rapprocher des points de grande abscisse qui prennent ainsi une influence prépondérante. N'est-ce pas supposer que le hasard change la loi des écarts quand  $y$  cesse d'être fixe pour devenir variable? Les plus grandes valeurs de  $y$  seraient-elles sujettes aux plus petites erreurs absolues? Si le hasard a voulu que la plus grande valeur de  $y$  soit la plus erronée, la valeur de  $\alpha$  sera fortement viciée par cette détermination à laquelle on a attribué l'influence prépondérante.

28. Voici une autre considération d'un ordre purement arithmétique : en ajoutant membre à membre les égalités telles que (1), comme dans la méthode de Cauchy, on a de grandes chances pour que les erreurs, indifféremment positives ou négatives, se détruisent en grande partie. Multiplions au contraire les deux membres de chaque équation par la valeur de  $u$  correspondante, comme dans la méthode des moindres carrés : les erreurs des premiers membres deviendront tout à fait inégales, et cela d'une façon systématique, les plus grandes répondant aux plus grandes valeurs de  $u$ . Elles ne se réduiront donc que si les plus grandes valeurs de  $u$  sont voisines et nombreuses. Quant aux valeurs plus petites, autant vaudrait les supprimer, tant elles ont peu d'influence sur le calcul.

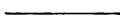
Cette dernière considération conduit à l'extension naturelle de la méthode de Cauchy au cas où la précision des observations est variable : si l'on estime, par exemple, que les mesures de l'indice  $n$  sont affectées d'erreurs dix fois plus fortes pour les radiations calorifiques que pour les radiations lumineuses, on les affectera d'un coefficient dix fois plus faible, et non cent fois plus faible comme le veut la

méthode des moindres carrés. Les erreurs qui s'ajoutent seront ainsi de même ordre et offriront de grandes chances de réduction.



## CHAPITRE II.

### FORMULES DE DISPERSION.



#### § I. — Choix de la formule.

29. Une formule de dispersion est une relation entre l'indice de réfraction et la longueur d'onde. De nombreuses formules ont été proposées, résultant de théories dont les principales sont dues à Cauchy, Briot, von Helmholtz. M. Ketteler les a discutées dans un Mémoire publié en 1887 (<sup>1</sup>). De toutes ces formes, plusieurs sont à rejeter comme contraires à l'expérience; les théories correspondantes sont au moins incomplètes. D'autres sont acceptables à peu près également; c'est un argument en faveur des théories qui y conduisent, mais non une preuve de leur exactitude. Ne peut-on pas suivre une marche inverse : se dégager d'hypothèses rendues peu vraisemblables par leur précision même et chercher une formule de dispersion en se basant sur les faits et s'aidant seulement d'idées générales communes à toutes les théories? puis tirer de cette formule, en quelque sorte expérimentale, des conséquences théoriques? Tel est le but que je me propose.

30. Pour simplifier les écritures, je considère une onde plane *polarisée rectilignement dans un milieu isotrope très peu absorbant*. L'élongation n'a qu'une composante  $\xi$ ; celle-ci dépend du temps  $t$  et d'une seule coordonnée  $x$  normale au plan d'onde; enfin les trois équations générales du mouvement lumineux se réduisent à une seule. Dans ces

---

(<sup>1</sup>) WIEDEMANN, *Annalen der Physik und Chemie*, Band 30.

conditions, le principe généralement admis (au moins comme approximation) est celui-ci :

*L'équation du mouvement lumineux est linéaire, à coefficients constants relativement à  $t$  et  $x$ , et cette équation réduite à ses termes principaux devient*

$$(1) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \frac{d^2 \xi}{dx^2},$$

*qui est l'équation du mouvement dans le vide.*

Cet énoncé est conforme à toutes les théories, même à celle de Helmholtz quand on suppose l'absorption très faible : cela suffit. Cependant quelques points de cet énoncé ne constituent pas des hypothèses, mais sont l'expression ou la conséquence des faits : l'équation est linéaire, c'est la conséquence nécessaire des phénomènes d'interférence ; dire que les coefficients sont indépendants de  $t$  et  $x$ , c'est exprimer que le milieu est homogène et dans un état permanent.

31. Soient, pour une radiation déterminée,  $n$ ,  $T$ ,  $\lambda$ ,  $l$  l'indice de réfraction, la période vibratoire, les longueurs d'onde dans le vide et dans le milieu. On a, pour cette radiation,

$$(2) \quad u = \sin \left( \frac{2\pi x}{l} - \frac{2\pi t}{T} + \varphi \right), \quad l = \frac{\lambda}{n},$$

$\varphi$  étant la phase.

Je porte cette valeur de  $u$  dans l'équation simplifiée (1). Multipliant les deux membres de l'équation obtenue par  $\frac{l^2}{4\pi^2 u}$  et remarquant que  $\frac{l^2}{T^2}$  est le carré de la vitesse de propagation  $v^2$ , il vient  $v^2 = A$ . D'ailleurs, l'indice de réfraction est le rapport des vitesses de la lumière dans le milieu et dans le vide ; je suis ainsi conduit à diviser les deux membres par  $V^2$ , carré de la vitesse dans le vide.

J'obtiens ainsi, en désignant par  $a$  le rapport de  $A$  au carré de la vitesse de la lumière dans le vide,

$$(3) \quad \frac{1}{n^2} = a.$$

Maintenant j'introduis dans l'équation différentielle (1) une dérivée d'ordre pair  $K \frac{d^p u}{dx^q dt^r}$ .

La valeur de  $u$  portée dans l'équation (1) donne, pour ce terme,

$$K \frac{(2\pi)^p}{l^q T^r} u;$$

celui-ci, multiplié par  $\frac{l^2}{4\pi^2 u}$ , puis divisé par  $V^2$ , devient

$$K(2\pi)^{p-2} l^{-q+2} T^{-r} V^{-2};$$

je remplace  $T$  et  $l$  par leurs valeurs

$$T = \frac{\lambda}{V}, \quad l = \frac{\lambda}{n};$$

il vient

$$K(2\pi)^{p-2} \times \lambda^{-q+2} n^{q-2} \times \lambda^{-r} V^r \times V^{-2} = K(2\pi)^{p-2} V^{r-2} \times \lambda^{-p+2} n^{q-2},$$

terme en  $\lambda^{-p+2} n^{q-2}$  dont le coefficient  $k = K(2\pi)^{p-2} V^{r-2}$  ne diffère de  $K$  que par le facteur connu  $(2\pi)^{p-2} V^{r-2}$ .

*Il en résulte, dans la formule de dispersion, un terme en  $\lambda^{-p+2} n^{q-2}$ .*

Je ne supposerai pas qu'on puisse introduire dans l'équation (1) de termes d'ordre impair : ces termes sont incompatibles avec la propagation inaltérée d'une vibration rectiligne de période quelconque; ils donnent des phénomènes, tels que l'absorption et la polarisation rotatoire.

32. La méthode que nous avons suivie permet d'énoncer la réciproque de la proposition précédente, puisqu'à chaque terme de l'équation différentielle correspond un terme de la formule de dispersion :

*Si l'on est certain que la formule de dispersion prise sous la forme*

$$\frac{1}{n^2} = a + \dots$$

*contient un terme en  $\lambda^{-p+2} n^{q-2}$ , on peut affirmer que l'équation différentielle contient un terme en  $\frac{d^p u}{dx^q dt^r}$ .*

Le coefficient de ce terme pourra même être calculé au moyen du coefficient correspondant de la formule de dispersion.

Quand on cherche expérimentalement quel terme on doit introduire dans la formule de dispersion, on peut bien hésiter sur l'exposant de  $n$ , mais non sur celui qu'il faut attribuer à  $\lambda$  dont la variation est beaucoup plus rapide. Un terme en  $\lambda^{-2}$  s'impose, et l'on peut hésiter seulement entre les formes  $\lambda^{-2}n^2$ ,  $\lambda^{-2}n$ , ...,  $\lambda^{-2}n^{-2}$ , lesquelles répondent aux dérivées du quatrième ordre  $\frac{d^4u}{d\epsilon^4}$ ,  $\frac{d^4u}{d\epsilon^3 dt}$ , ...,  $\frac{d^4u}{dt^4}$ . D'autre part, l'étude des radiations calorifiques montre la nécessité d'un terme en  $\lambda^2$ . Celui-ci répond à une dérivée d'ordre zéro, c'est-à-dire à un terme en  $u$ ; il n'y a donc pas à hésiter ici : ce terme est nécessairement de la forme

$$c\lambda^2 n^{-2} = c l^2.$$

C'est le *terme de Briot*, qui a été contesté tant qu'on s'est borné au spectre visible. La nécessité de ce terme a été démontrée pour la première fois par M. Mouton <sup>(1)</sup>, et cela de la façon la plus complète. Elle a été confirmée ensuite par les expériences de M. Langley <sup>(2)</sup> sur le sel gemme, comme je l'ai montré <sup>(3)</sup>.

33. Ces considérations sont subordonnées seulement à l'hypothèse précédente (n° 30) qu'il semble bien difficile de contester. Elles justifient le choix d'une formule de la forme

$$\frac{1}{n^2} = a + \dots$$

De plus, pour les radiations calorifiques et les grandes valeurs de  $\lambda$ , elles conduisent, comme on vient de voir, à prendre pour variable  $l^2$ . Pour les valeurs petites de  $\lambda$  (radiations ultra-violettes), on peut prendre pour variable  $\lambda^{-2}$  ou  $l^{-2}$ ; mais le choix précédent de  $l^2$  conduit à choisir  $l^{-2}$ .

D'ailleurs, il paraît assez naturel de prendre la longueur d'onde dans

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 967, 1078, 1189; 1879.

<sup>(2)</sup> *Annales de Chim. et de Phys.*, 6<sup>e</sup> série, t. IX; 1886.

<sup>(3)</sup> *Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. VIII; avril 1889.

le milieu plutôt que la longueur d'onde dans le vide. J'ai été ainsi amené à construire pour chaque corps deux espèces de courbes de la forme

$$(1) \quad \frac{1}{n^2} = f(l^2), \quad \text{favorable à l'étude des radiations calorifiques;}$$

$$(2) \quad \frac{1}{n^2} = \varphi(l^{-2}), \quad \text{» » » ultra-violettes.}$$

Ces courbes ont très nettement la forme d'hyperboles <sup>(1)</sup>. Leur examen dispense de toute discussion numérique; leurs équations sont très sensiblement

$$(1) \quad y = a + \frac{b}{x} + cx,$$

$$(2) \quad y = a + bx + \frac{c}{x}.$$

La formule de dispersion est donc, avec une grande approximation,

$$\frac{1}{n^2} = a + bl^{-2} + cl^2.$$

D'après ce qui précède, le principe (n° 30) étant admis, il n'y a pas à hésiter sur les termes  $a + cl^2$ ; le terme en  $l^{-2} = \lambda^{-2} n^2$  est moins certain et n'en exclut pas d'autres en  $\lambda^{-2} n \dots \lambda^{-2} n^{-2}$ , puis en  $\lambda^{-4} \dots$ . On peut même constater sur les courbes  $\frac{1}{n^2} = \varphi(l^{-2})$  que, pour l'extrême ultra-violet, elles s'affaissent sensiblement au-dessous de l'hyperbole; un terme en  $l^{-4}$  ramène bien la concordance entre la formule et l'expérience. D'autre part, on constate que, si on laisse l'ultra-violet pour ne s'occuper que des rayons visibles et calorifiques, la formule à trois termes

$$\frac{1}{n^2} = a + bl^{-2} + cl^2$$

représente très bien les observations, tandis que, si l'on remplace le terme en  $l^{-2}$  par un terme en  $\lambda^{-2}$ , il faut ajouter un terme en  $\lambda^{-4}$ . C'est là un nouvel argument en faveur du choix des variables  $l^{-2}$  ou  $l^2$  au lieu de  $\lambda^{-2}$  ou  $\lambda^2$ .

---

(1) Voir ces courbes (nos 35, 38, 95, 96 et 99).

## § II. — Applications.

34. Je vais appliquer la formule de dispersion au sel gemme et aux deux rayons ordinaire et extraordinaire du quartz. Plus loin, on trouvera son application au spath d'Islande pour les deux indices principaux et le rayon extraordinaire à  $30^\circ$  de l'axe optique. Si j'ai choisi ces corps et m'y suis borné, c'est parce qu'ils offrent les séries de beaucoup les plus étendues dans les deux sens. L'application de la formule à d'autres corps serait bien moins concluante. On trouvera (nos 35, 38, 95, 96 et 99), pour chaque corps, deux courbes ayant pour ordonnées  $\frac{1}{n^2}$  et pour abscisses respectivement  $l^2$  et  $l'^2$ . L'échelle des  $\frac{1}{n^2}$  est de 1<sup>mm</sup> pour 0,0002 ('). Or, dans le spectre visible, les erreurs sur cette quantité montent à peine à 0,00001 pour des expériences bien faites; dans le spectre ultra-violet, la précision est la même pour les déterminations photographiques; elle est dix à vingt fois plus faible pour les déterminations à l'oculaire fluorescent et aussi dans le spectre calorifique. Les premières erreurs sont donc inappréciables sur le graphique; les autres se traduisent par des écarts d'environ 1<sup>mm</sup>. Pour calculer  $l^2$  et  $l'^2$ , j'ai évalué  $\lambda$  en microns (1 micron = 0<sup>mm</sup>,001). L'échelle des  $l^2$  est de 1<sup>mm</sup> pour 0,01; celle des  $l'^2$ , de 1<sup>mm</sup> pour deux unités. Avec ces renseignements, la considération des courbes est tellement nette qu'elle me dispensera de toute discussion numérique pour justifier la forme adoptée pour la formule de dispersion, l'existence de chaque terme et la valeur pratique de chaque formule numérique. On remarquera aussi sur ces courbes la faible étendue du spectre visible, et l'on comprendra combien il était difficile d'y découvrir le terme de Briot, la courbe  $\frac{1}{n^2} = f(l^2)$  étant très sensiblement une droite dans cette région.

35. *Sel gemme.* — Par l'application de mes formules à la méthode des moindres carrés, j'ai traité les nombres de M. Langley (2). Je me

(1) Mes dessins ont été réduits pour la gravure.

(2) LANGLEY, *Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. IX, p. 433; 1886.

contente de reproduire les données et les résultats de ce calcul (') :

|             | $\lambda$ . | $n$ .   | $\frac{1}{n^2}$ . | $l^{-2}$ . | $l^2$ . | $\Delta^2 y$ . |
|-------------|-------------|---------|-------------------|------------|---------|----------------|
|             | $5,301^\mu$ | 1,5186  | 0,433624          | 0,08206    | 12,1855 | -0,00015       |
|             | 4,712       | 1,5201  | 432769            | 0,10407    | 9,6091  | — 2            |
|             | 4,123       | 1,5215  | 431972            | 0,13617    | 7,3435  | + 7            |
|             | 3,534       | 1,5227  | 431292            | 0,18564    | 5,3868  | + 19           |
|             | 2,945       | 1,5243  | 430387            | 0,26788    | 3,7330  | + 2            |
|             | 2,356       | 1,5254  | 429767            | 0,41920    | 2,3855  | + 12           |
|             | 1,767       | 1,5272  | 428754            | 0,74700    | 1,3387  | — 6            |
|             | 1,178       | 1,5301  | 427130            | 1,68713    | 0,5927  | 0              |
| A.....      | 0,75940     | 1,53670 | 423470            | 4,09484    | 0,24421 | — 08           |
| C.....      | 0,65630     | 1,54051 | 421377            | 5,50965    | 0,18150 | — 10           |
| D.....      | 0,58961     | 1,54414 | 419399            | 6,85872    | 0,14580 | — 01           |
| $b_1$ ..... | 0,51838     | 1,54975 | 416368            | 8,93773    | 0,11188 | + 18           |
| F.....      | 0,48614     | 1,55323 | 414503            | 10,2082    | 0,09796 | + 14           |
| H.....      | 0,39687     | 1,56833 | 406560            | 15,6163    | 0,06404 | — 11           |

Ces diverses colonnes donnent pour chaque radiation les quantités marquées par les en-têtes; les deux premières sont empruntées au Mémoire de M. Langley; les trois suivantes s'en déduisent par le calcul. La colonne  $\Delta^2 y$  est le résultat définitif du calcul d'interpolation; on y trouve les valeurs de l'excès  $\frac{1}{n^2}$  observé —  $\frac{1}{n^2}$  calculé, exprimées en unités du cinquième chiffre décimal pour la partie calorifique, et en unités du sixième chiffre pour la partie visible du spectre. La formule obtenue est

$$\frac{1}{n^2} = a + bl^{-2} + cl^2,$$

avec

$$a = + 0,429\,373, \quad b = - 0,001\,461\,6, \quad c = + 0,000\,371,$$

$$\pm 12, \quad \pm 22, \quad \pm 18.$$

Je reproduis la comparaison de cette formule ('), que j'appelle *formule de Briot*, et de celle de M. Ketteler (²)

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0,000\,858\,0, \quad D = 1,141\,0, \\ a^2 = 2,328\,83, \quad \lambda_m^2 = 0,016\,21, \end{array} \right.$$

(¹) *Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. VIII; avril 1889.

(²) *Dispersions-Formeln* (*Wied. Ann.*, t. XXX).



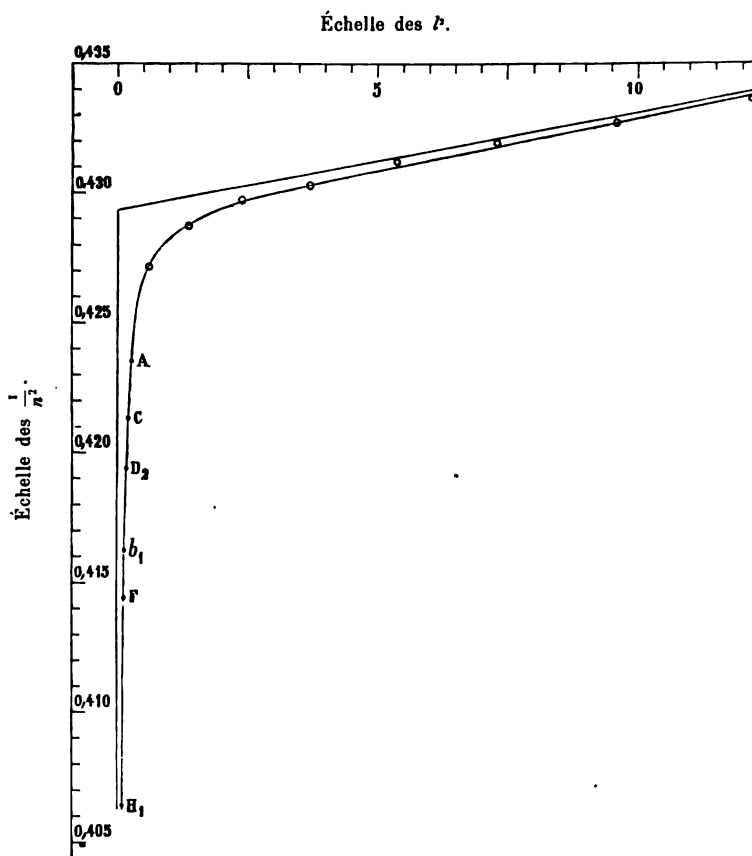
avec les observations de M. Langley et celles de M. Joubin <sup>(1)</sup>, que je distingue par des caractères gras. L'écart entre ces dernières et la formule serait diminué par un terme en  $l^{-4}$ ; mais les déterminations des deux observateurs ne sont pas assez comparables pour justifier ce nouveau calcul.

| $\lambda$ .        | $n$ observé.       | Briot.<br>—<br>$n$ calculé. | Ketteler.<br>—<br>$n$ calculé. | Différences.        |                        |
|--------------------|--------------------|-----------------------------|--------------------------------|---------------------|------------------------|
|                    |                    |                             |                                | Briot<br>obs.-calc. | Ketteler<br>obs.-calc. |
| 5,301 ( $\pm 65$ ) | 1,5186 ( $\pm 2$ ) | 1,51834                     | 1,51835                        | +0,00026            | +0,00025               |
| 4,712 ( $\pm 43$ ) | 1,5201 ( $\pm 2$ ) | 1,52007                     | 1,52007                        | + 3                 | + 3                    |
| 4,123 ( $\pm 29$ ) | 1,5215 ( $\pm 1$ ) | 1,56162                     | 1,56162                        | -- 12               | -- 12                  |
| 3,534 ( $\pm 19$ ) | 1,5227 ( $\pm 2$ ) | 1,52303                     | 1,52302                        | -- 33               | -- 32                  |
| 2,945 ( $\pm 13$ ) | 1,5243 ( $\pm 0$ ) | 1,52433                     | 1,52431                        | -- 3                | -- 1                   |
| 2,356 ( $\pm 9$ )  | 1,5254 ( $\pm 1$ ) | 1,52561                     | 1,52559                        | -- 21               | -- 19                  |
| 1,767 ( $\pm 5$ )  | 1,5272 ( $\pm 1$ ) | 1,52710                     | 1,52712                        | + 10                | + 8                    |
| 1,178 ( $\pm 2$ )  | 1,5301 ( $\pm 1$ ) | 1,53010                     | 1,53007                        | 0                   | + 3                    |
| 0,75940            | 1,53670            | 1,53069                     | 1,53666                        | + 1                 | + 4                    |
| 65630              | 1,54051            | 1,54049                     | 1,54048                        | + 2                 | + 3                    |
| <b>64370</b>       | <b>1,54151</b>     | <b>1,54111</b>              | "                              | + 40                |                        |
| 58901              | 1,54414            | 1,54412                     | 1,54413                        | + 2                 | + 1                    |
| <b>53771</b>       | <b>1,54839</b>     | <b>1,54802</b>              | "                              | + 37                |                        |
| <b>53363</b>       | <b>1,54875</b>     | <b>1,54840</b>              | "                              | + 35                |                        |
| 51838              | 1,54975            | 1,54977                     | 1,54979                        | -- 2                | -- 4                   |
| <b>50844</b>       | <b>1,55116</b>     | <b>1,55079</b>              | "                              | + 37                |                        |
| 48614              | 1,55323            | 1,55324                     | 1,55327                        | -- 1                | -- 4                   |
| <b>47986</b>       | <b>1,55436</b>     | <b>1,55404</b>              | "                              | + 32                |                        |
| <b>46765</b>       | <b>1,55596</b>     | <b>1,55568</b>              | "                              | + 28                |                        |
| <b>44145</b>       | <b>1,55982</b>     | <b>1,55955</b>              | "                              | + 27                |                        |
| <b>39856</b>       | <b>1,56810</b>     | <b>1,56793</b>              | "                              | + 17                |                        |
| 39687              | 1,56833            | 1,56832                     | 1,56830                        | + 1                 | + 3                    |
| <b>36090</b>       | <b>1,57877</b>     | <b>1,57832</b>              | <b>1,5783</b>                  | + 45                | + 47                   |
| <b>34655</b>       | <b>1,58391</b>     | <b>1,58340</b>              | <b>1,5833</b>                  | + 51                | + 61                   |
| <b>34015</b>       | <b>1,58641</b>     | <b>1,58591</b>              | <b>1,5858</b>                  | + 50                | + 61                   |
| <b>32470</b>       | <b>1,59330</b>     | <b>1,59272</b>              | <b>1,5925</b>                  | + 58                | + 80                   |
| <b>27467</b>       | <b>1,62790</b>     | <b>1,62647</b>              | <b>1,6251</b>                  | + 143               | + 275                  |
| <b>25713</b>       | <b>1,64870</b>     | <b>1,64547</b>              | <b>1,6430</b>                  | + 313               | + 570                  |
| <b>23125</b>       | <b>1,68855</b>     | <b>1,68682</b>              | <b>1,6808</b>                  | + 173               | + 775                  |
| <b>22645</b>       | <b>1,69900</b>     | <b>1,69836</b>              | <b>1,6900</b>                  | + 164               | + 900                  |

<sup>(1)</sup> Thèse pour le doctorat (*Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 136 et 139).

Voici la courbe que j'obtiens (*fig. 3*) en prenant pour abscisses les  $\lambda^2$  et pour ordonnées les  $\frac{1}{n^2}$ .

Fig. 3.



36. *Quartz, rayon ordinaire.* — A l'aide de l'oculaire fluorescent, M. Sarazin a déterminé <sup>(1)</sup> les indices du rayon ordinaire du quartz dans le spectre ultra-violet jusqu'à la raie 32 de l'aluminium. En comparant ses nombres à la formule que j'ai obtenue par la méthode de Cauchy pour le spectre visible (n° 13), j'obtiens les résultats suivants :

(<sup>1</sup>) SARAZIN, *Comptes rendus*, t. LXXXV, p. 1230.

|     | $\lambda$ . | $n$ .   | $l^{-1}$ . | $b$ .  | $\frac{1}{n^2}$ observé. | $\frac{1}{n^2}$ calculé. | Diff.<br>O. — C. |
|-----|-------------|---------|------------|--------|--------------------------|--------------------------|------------------|
| Cd. | 9.....      | 0,36090 | 1,56348    | 18,768 | 0,0533                   | 0,409087                 | 0,409080 + 7     |
|     | 10.....     | 34655   | 1,56617    | 20,424 | 490                      | 407683                   | 407692 -- 9      |
|     | 11.....     | 34015   | 1,56744    | 21,234 | 470                      | 407022                   | 407014 + 8       |
|     | 12.....     | 32470   | 1,57094    | 23,108 | 427                      | 405210                   | 405200 + 10      |
|     | 17.....     | 27467   | 1,58750    | 33,105 | 299                      | 396800                   | 396889 -- 89     |
|     | 18.....     | 25713   | 1,59624    | 38,538 | 260                      | 392469                   | 392634 -- 165    |
|     | 23.....     | 23125   | 1,61402    | 48,715 | 205                      | 383869                   | 384210 - 341     |
|     | 24.....     | 22645   | 1,61816    | 51,062 | 196                      | 381908                   | 382268 -- 360    |
|     | 25.....     | 21935   | 1,62502    | 54,885 | 182                      | 378689                   | 379107 -- 418    |
|     | 26.....     | 0,21431 | 1,63040    | 57,878 | 0,0173                   | 0,376194                 | 0,376633 -- 439  |
| Zn. | 27.....     | 0,20988 | 1,63569    | 60,738 | 0,0165                   | 0,373764                 | 0,374269 -- 505  |
|     | 28.....     | 20610   | 1,64041    | 63,349 | 158                      | 371618                   | 372057 -- 439    |
|     | 29.....     | 0,20243 | 1,64566    | 66,089 | 0,0151                   | 0,369250                 | 0,369846 -- 596  |
| Al. | 30.....     | 0,19881 | 1,65070    | 68,938 | 0,0145                   | 0,366998                 | 0,367493 -- 495  |
|     | 31.....     | 19311   | 1,65990    | 73,884 | 135                      | 362941                   | 363407 -- 466    |
|     | 32.....     | 0,18562 | 1,67500    | 81,430 | 0,0123                   | 0,356427                 | 0,357175 -- 748  |

Si l'on forme une courbe qui a pour abscisses les valeurs de  $l^{-2}$  et pour ordonnées les différences  $\frac{1}{n^2}$  observé —  $\frac{1}{n^2}$  calculé, on reconnaît que cette courbe a une forme parabolique, ce qui conduit à introduire dans la formule de dispersion un terme en  $l^{-4}$ . Quelle méthode employer pour ce nouveau calcul d'interpolation? La méthode des moindres carrés proprement dite? Mais la précision des observations est tout à fait variable. La solution de Gauss ne peut être non plus appliquée, puisqu'on ignore la précision de chaque observation. Il y a plus, l'indécision porte non seulement sur la mesure de  $n$ , mais aussi sur celle de  $\lambda$ ; le calcul montre, en effet, qu'une erreur de deux unités du quatrième chiffre sur la valeur de  $\lambda$  produit sur le terme  $bl^{-2}$  de la formule de dispersion une erreur qui, pour la raie 32 (aluminium), entraîne sur l'indice une erreur d'environ 20 unités du cinquième chiffre décimal. Ainsi les erreurs sur la détermination de  $\lambda$ , qui étaient sans influence dans le spectre visible, deviennent ici prépondérantes, en sorte qu'il serait presque plus raisonnable de calculer  $\lambda$  au moyen de l'indice à l'aide de la formule de dispersion que de déterminer la formule de dispersion par le concours des valeurs de  $n$  et  $\lambda$  pour les raies extrêmes de l'ultra-violet.

Il en serait rigoureusement ainsi, si un terme en  $l^{-4}$  ne venait ajouter son influence. On le voit, de graves difficultés surgissent; encore pourraient-elles être résolues si l'on connaissait l'erreur moyenne de chaque détermination de  $n$  et  $\lambda$ , mais on est dans l'ignorance complète de ces erreurs. La méthode de Cauchy s'impose donc par ses qualités de prudence; mais, malgré sa simplicité, l'effort qu'elle réclame n'est pas justifié par le peu de valeur des données du problème d'interpolation. Faut-il donc renoncer à faire concourir toutes les observations au calcul des coefficients? A coup sûr, moins que jamais, car une observation isolée peut se trouver très défectueuse. Voici donc la méthode à laquelle je me suis arrêté et qui paraît réunir, dans une mesure convenable, les avantages de simplicité et d'exactitude. J'ai groupé les observations en plusieurs séries; pour chacune d'elles, j'ai pris la moyenne des équations qu'elle contient. Enfin j'ai traité ces équations moyennes en nombre beaucoup moindre par la méthode de Cauchy, modifiée conformément aux observations que j'ai présentées (n° 28) pour le cas de la précision variable. Les groupes, au nombre de cinq, sont indiqués dans le Tableau suivant, dont la dernière colonne indique le multiplicateur employé pour la modification de la méthode de Cauchy.

|                                | Nombre<br>d'observations. | Observateurs.    | Multiplicateurs. |
|--------------------------------|---------------------------|------------------|------------------|
| I. Radiations calorifiques.... | 5                         | Mouton.          | 0,5              |
| II. A, $\alpha$ , B, C.....    | 4                         | Macé de Lépinay. | 4                |
| III. D, E, F.....              | 3                         | Id.              | 3                |
| IV. G', h, H.....              | 3                         | Id.              | 3                |
| V. Raies 9 à 32.....           | 16                        | Sarazin.         | 0,5              |

De cette façon, les groupes II, III, IV servent exclusivement pour le calcul des coefficients  $a$  et  $b$  et contribuent à la détermination des deux autres; le groupe I est prépondérant pour le calcul de  $c$ , et le groupe V, pour le calcul de  $d$ . J'ai ainsi obtenu, pour les coefficients de la formule de dispersion,

$$\frac{1}{n^2} = a + bl^{-2} + cl^2 + dl^{-4},$$

les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a &= +0,424301, & b &= -0,0008222, \\ c &= +0,00479, & d &= -0,000000164. \end{aligned}$$

Voici le Tableau général de la comparaison des valeurs de  $n$  observé et de  $n$  calculé. Segmenté en quatre groupes pour faciliter la lecture, il offre comme variantes les nombres de Rudberg et de M. Mascart.

|         | $\lambda$ . | Rudberg. | Mascart. | $n$ obs. | $n$ calc. | Diff.<br>O. — C. |
|---------|-------------|----------|----------|----------|-----------|------------------|
|         | $\mu$       |          |          |          |           |                  |
|         | 2,14        | "        | "        | 1,5191.  | 1,5190.   | + 1.             |
|         | 1,77        | "        | "        | 1,5247.  | 1,5247.   | 0.               |
|         | 1,45        | "        | "        | 1,5289.  | 1,5291.   | — 2.             |
|         | 1,08        | "        | "        | 1,5338.  | 1,5339.   | — 1.             |
|         | 0,88        | "        | "        | 1,5371.  | 1,5370.   | + 1.             |
| A.....  | 0,76040     | "        | 1,53902  | 1,53919  | 1,53919   | 0                |
| a.....  | 71836       | "        | "        | 1,54017  | 1,54017   | 0                |
| B.....  | 68674       | 1,54090  | 1,54099  | 1,54100  | 1,54100   | 0                |
| C.....  | 65621       | 1,54181  | 1,54188  | 1,54190  | 1,54189   | + 1              |
| D.....  | 58920       | 1,54418  | 1,54423  | 1,54425  | 1,54424   | + 1              |
| E.....  | 52690       | 1,54711  | 1,54718  | 1,54717  | 1,54717   | 0                |
| F.....  | 48607       | 1,54965  | 1,54966  | 1,54969  | 1,54969   | 0                |
| G'..... | 43256       | "        | "        | 1,55413  | 1,55411   | + 2              |
| h.....  | 41012       | "        | "        | 1,55650  | 1,55652   | — 2              |
| H.....  | 39672       | 1,55817  | 1,55816  | 1,55816  | 1,55815   | + 1              |
| L.....  | 38190       | "        | 1,56019  | "        | 1,56018   | + 1              |
| M.....  | 37288       | "        | 1,56150  | "        | 1,56154   | — 4              |
| 9.....  | 36090       | "        | "        | 1,56348  | 1,56352   | — 4              |
| N.....  | 35802       | "        | 1,56400  | "        | 1,56402   | — 2              |
| 10..... | 34655       | "        | "        | 1,56617  | 1,56618   | — 1              |
| O.....  | 34401       | "        | 1,56668  | "        | 1,56670   | — 2              |
| 11..... | 34015       | "        | "        | 1,56744  | 1,56750   | — 6              |
| P.....  | 33602       | "        | 1,56842  | "        | 1,56839   | + 3              |
| 12..... | 32470       | "        | "        | 1,57094  | 1,57102   | — 8              |
| 17..... | 27467       | "        | "        | 1,58750  | 1,58751   | — 1              |
| 18..... | 25713       | "        | "        | 1,59624  | 1,59618   | + 6              |
| 23..... | 23125       | "        | "        | 1,61402  | 1,61383   | + 19             |
| 24..... | 22645       | "        | "        | 1,61816  | 1,61800   | + 16             |
| 25..... | 21935       | "        | "        | 1,62502  | 1,62485   | + 17             |
| 26..... | 21431       | "        | "        | 1,63040  | 1,63028   | + 12             |
| 27..... | 20988       | "        | "        | 1,63569  | 1,63553   | + 16             |
| 28..... | 20610       | "        | "        | 1,64041  | 1,64038   | + 3              |
| 29..... | 20243       | "        | "        | 1,64566  | 1,64551   | + 15             |
| 30..... | 19881       | "        | "        | 1,65070  | 1,65089   | — 19             |
| 31..... | 19311       | "        | "        | 1,65990  | 1,66040   | — 50             |
| 32..... | 0,18562     | "        | "        | 1,67500  | 1,67525   | — 25             |

37. *Quartz, rayon extraordinaire.* — Les mêmes considérations montrent qu'il faut introduire un terme en  $l^{-4}$  dans la formule de dispersion si on veut lui faire embrasser les déterminations de M. Sarazin. D'ailleurs, il suffit de regarder les courbes de la *fig. 4* pour voir que la loi de dispersion est sensiblement la même pour le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire du quartz. J'ai donc opéré comme dans le calcul précédent. Seulement l'expérience du premier calcul m'ayant appris que la précision des observations est assez bonne jusqu'à la raie 18, pour devenir brusquement plus mauvaise à partir de la raie 23, j'ai fait un groupe de plus; le cinquième groupe allant de la raie 9 à la raie 18 du cadmium, et le sixième, de la raie 23 du cadmium à la raie 32 de l'aluminium.

J'ai ainsi obtenu la formule

$$\frac{1}{n^2} = a + bt^{-2} + ct^2 + dt^{-4},$$

avec

$$\begin{aligned} a &= +0,419480, & b &= -0,0008256, \\ c &= +0,00485, & d &= -0,0000001253. \end{aligned}$$

Enfin je compare les valeurs de  $n$  observé et de  $n$  calculé; le Tableau suivant, disposé comme pour le rayon ordinaire, présente des écarts de même ordre.

|          | $\lambda$ . | Rudberg. | Mascart. | $n$ obs. | $n$ calc. | Diff.<br>O. — C. |
|----------|-------------|----------|----------|----------|-----------|------------------|
|          | $\mu$       |          |          |          |           |                  |
|          | 2,14        | »        | »        | 1,5278.  | 1,5276.   | + 2.             |
|          | 1,77        | »        | »        | 1,5335.  | 1,5334.   | + 1.             |
|          | 1,45        | »        | »        | 1,5377.  | 1,5378.   | — 1.             |
|          | 1,08        | »        | »        | 1,5427.  | 1,5427.   | 0.               |
|          | 0,88        | »        | »        | 1,5460.  | 1,5458.   | + 2.             |
| A .....  | 0,76040     | »        | 1,54812  | 1,54813  | 1,54816   | — 3              |
| a .....  | 71836       | »        | »        | 1,54915  | 1,54917   | — 2              |
| B .....  | 68674       | 1,54990  | 1,55002  | 1,55000  | 1,55001   | — 1              |
| C .....  | 65621       | 1,54083  | 1,55095  | 1,55093  | 1,55093   | 0                |
| D .....  | 58920       | 1,55328  | 1,55338  | 1,55336  | 1,55337   | — 1              |
| E .....  | 52690       | 1,55631  | 1,55636  | 1,55640  | 1,55639   | + 1              |
| F .....  | 58607       | 1,55894  | 1,55897  | 1,55899  | 1,55899   | 0                |
| G' ..... | 43256       | »        | »        | 1,56357  | 1,56356   | + 1              |
| h .....  | 41012       | »        | »        | 1,56604  | 1,56602   | + 2              |
| H .....  | 0,39672     | 1,56772  | 1,56770  | 1,56775  | 1,56774   | + 1              |

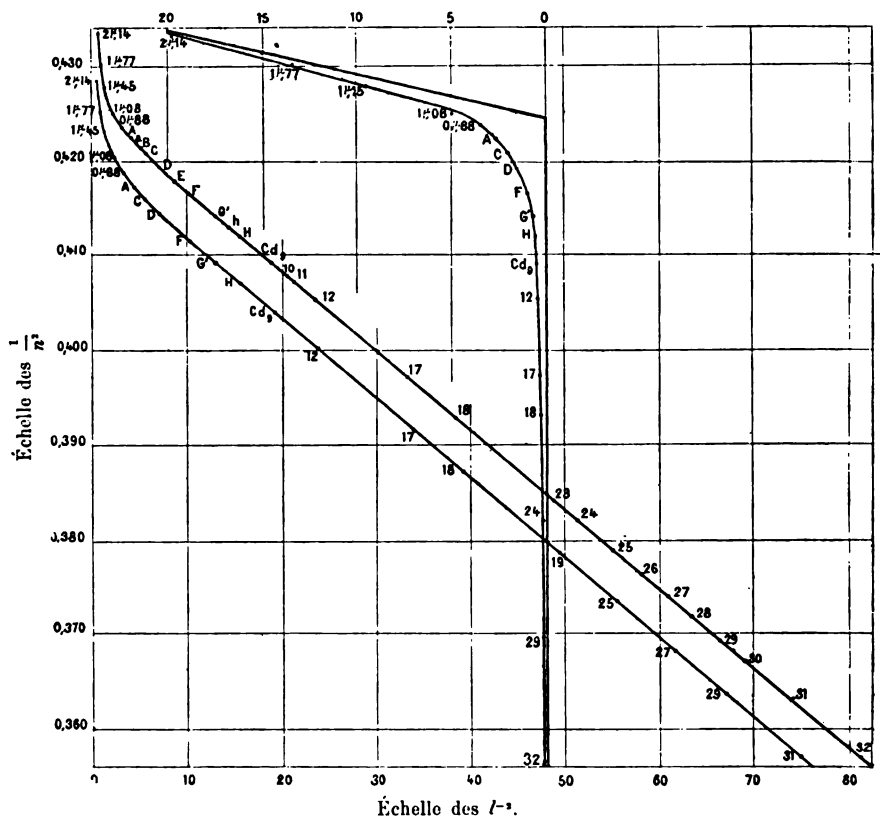
|         | $\lambda$ . | Rudberg. | Mascart. | $n$ obs. | $n$ calc. | Diff.<br>O. — C. |
|---------|-------------|----------|----------|----------|-----------|------------------|
| L.....  | 0,38190     | »        | 1,56974  | »        | 1,56985   | -- 11            |
| M.....  | 37288       | »        | 1,57121  | »        | 1,57124   | -- 3             |
| 9.....  | 36090       | »        | »        | 1,57319  | 1,57329   | -- 10            |
| N.....  | 35802       | »        | 1,57381  | »        | 1,57381   | 0                |
| 10..... | 34655       | »        | »        | 1,57599  | 1,57606   | -- 7             |
| O.....  | 34401       | »        | 1,57659  | »        | 1,57659   | 0                |
| 11..... | 34015       | »        | »        | 1,57741  | 1,57741   | 0                |
| P.....  | 33602       | »        | 1,57822  | »        | 1,57834   | -- 12            |
| Q.....  | 32856       | »        | 1,57998  | »        | 1,58011   | -- 13            |
| 12..... | 32470       | »        | »        | 1,58097  | 1,58106   | -- 9             |
| R.....  | 31798       | »        | 1,58273  | »        | 1,58292   | -- 19            |
| 17..... | 27467       | »        | »        | 1,59812  | 1,59815   | -- 3             |
| 18..... | 25713       | »        | »        | 1,60713  | 1,60714   | -- 1             |
| 23..... | 23125       | »        | »        | 1,62561  | 1,62550   | + 11             |
| 24..... | 22645       | »        | »        | 1,62992  | 1,62982   | + 10             |
| 25..... | 21935       | »        | »        | 1,63705  | 1,63695   | + 10             |
| 26..... | 21431       | »        | »        | 1,64268  | 1,64261   | + 7              |
| 27..... | 20988       | »        | »        | 1,64813  | 1,64807   | + 6              |
| 28..... | 20610       | »        | »        | 1,65308  | 1,65312   | -- 4             |
| 29..... | 20243       | »        | »        | 1,65852  | 1,65847   | + 5              |
| 30..... | 19881       | »        | »        | 1,66410  | 1,66415   | -- 5             |
| 31..... | 19311       | »        | »        | 1,67410  | 1,67415   | -- 5             |
| 32..... | 0,18562     | »        | »        | 1,68910  | 1,68957   | -- 47            |

38. Pour les rayons ordinaire et extraordinaire du quartz, l'accord entre l'observation et le calcul est, on le voit, très satisfaisant; les écarts sont certainement imputables aux erreurs d'observation. S'ils n'ont pas toujours les caractères d'erreurs accidentelles, c'est qu'en effet il y a des erreurs systématiques assez fortes provenant de ce que les séries dues à des observateurs différents ne sont pas comparables. Ce fait est mis en évidence par la comparaison des nombres dans la partie visible : pour la raie B du rayon extraordinaire, la différence entre les nombres de Rudberg et de M. Mascart monte à douze unités du cinquième chiffre décimal. Cette différence, beaucoup plus grande que les écarts entre la formule et les nombres de M. Macé de Lépinay, est de l'ordre des autres écarts. Deux seulement sont bien forts : — 50 pour la raie 31 du rayon ordinaire et — 47 pour la raie 32 du rayon extraordinaire. Ce sont à coup sûr des accidents explicables dans ces observations difficiles. Comme je l'ai montré, il faudrait tenir compte

aussi de l'influence considérable des erreurs de  $\lambda$  dans cette région extrême du spectre.

Si maintenant on considère sur la *fig. 4* l'étendue énorme des courbes, on sera convaincu que la forme adoptée pour la formule possède une remarquable aptitude à représenter le phénomène de la

Fig. 4.

Échelle des  $t$ .

dispersion. C'est là une preuve sérieuse à l'appui de notre postulat (n° 30). Elle est de nature à donner un grand poids aux importantes conséquences que nous allons étudier dans le Chapitre suivant.



## CHAPITRE III.

## DISPERSION ET DOUBLE RÉFRACTION.

## § I. — Influence du terme de dispersion de Briot sur les lois de la double réfraction.

39. La double réfraction a provoqué bien des théories : illustrée par les noms de Fresnel, Cauchy, Lamé, Mac Cullagh, Neumann, elle a été l'objet de travaux remarquables de MM. Maxwell, Sarrau, Bousinesq.

Quoique très différentes par les hypothèses, l'analyse et les résultats, ces théories ont des caractères communs : partir d'hypothèses précises plus ou moins vraisemblables, mais nullement nécessaires; en déduire les formules du mouvement lumineux; enfin vérifier que ces formules conduisent aux lois expérimentales de la double réfraction. On néglige d'ailleurs les phénomènes accessoires. La dispersion est l'objet de théories spéciales.

On vient de lire dans la première Partie une marche inverse et qui consiste à remonter de l'expérience à la théorie en partant seulement d'idées générales qui sont en quelque sorte l'expression même des faits observés : c'est la méthode expérimentale. Dans cette voie, M. Maurice Lévy a donné (1) tous les systèmes d'équations capables de représenter les lois de la double réfraction pour une lumière homogène. Ils sont nombreux. Combien de théories pourraient enrichir encore le nombre de celles qui existent déjà! Toutes seraient aussi incertaines. Au contraire, l'examen attentif des faits et leur comparaison conduit à des conséquences nécessaires. Une seule de ces conséquences peut renverser tout un groupe de théories; aucune ne saurait

---

(1) *Comptes rendus*, t. CV, p. 1044; 1887.

*Ann. de l'Éc. Normale*. 3<sup>e</sup> Série. Tome VII.

être mise en suspicion par les conséquences d'hypothèses qui, pour être très précises, n'en sont que moins probables. Je n'exposerai pas les recherches que j'ai poursuivies dans la même voie que M. Maurice Lévy. Elles sortiraient du cadre de ce travail que je tiens à limiter aux résultats positifs et utiles et ne pourraient guère être exposées sans le secours puissant des systèmes linéaires. La simplicité d'écriture que donne cette méthode de Laguerre, jointe à celle des quaternions, m'a permis d'aborder les termes de dispersion dans l'étude de la double réfraction et de découvrir les conséquences que je vais exposer après les avoir dégagées de ces recherches.

40. J'ai appliqué la formule de dispersion de Briot

$$\frac{1}{n^2} = ct^2 + a + bt^{-2} + \dots$$

aux nombres donnés par M. Mascart <sup>(1)</sup> pour les rayons ordinaire et extraordinaire du spath d'Islande. Les calculs, faits par la méthode de Cauchy, montrent comment la méthode permet de s'arrêter juste au nombre de termes nécessaires pour renfermer les observations dans une même formule, trois termes pour le rayon ordinaire et deux pour le rayon extraordinaire. Il importe de remarquer que cet avantage est entièrement conservé par l'usage des formules que j'ai données pour l'application de la méthode des moindres carrés. C'est là un résultat nouveau dont l'intérêt pratique n'échappera à personne. Ces considérations me décident à reproduire les calculs, qui offrent d'ailleurs cet intérêt d'être l'origine du présent Mémoire. Mais voici d'abord le Tableau des données de M. Mascart :

| Raies. | $\lambda$ . | $n_o$ . | $n_e$ . |
|--------|-------------|---------|---------|
| A..... | 0,76040     | 1,65012 | 1,48285 |
| B..... | 68671       | 1,65296 | 1,48409 |
| C..... | 65607       | 1,65446 | 1,48474 |
| D....  | 58920       | 1,65846 | 1,48654 |
| E..... | 52678       | 1,66354 | 1,48885 |
| F..... | 0,48607     | 1,66793 | 1,49084 |

(1) *Comptes rendus*, t. LVII.

| Raies. | $\lambda$ . | $n_o$ . | $n_e$ . |
|--------|-------------|---------|---------|
| G..... | 0,43075     | 1,67620 | 1,49470 |
| H..... | 39681       | 1,68330 | 1,49777 |
| L..... | 38190       | 1,68706 | 1,49941 |
| M..... | 37288       | 1,68966 | 1,50054 |
| N..... | 35802       | 1,69441 | 1,50256 |
| O..... | 34401       | 1,69955 | 1,50486 |
| P..... | 33602       | 1,70276 | 1,50628 |
| Q..... | 32856       | 1,70613 | 1,50780 |
| R..... | 0,31775     | 1,71155 | 1,51028 |

Dans ce Tableau, la colonne  $\lambda$  donne les longueurs d'onde; les colonnes  $n_o$  et  $n_e$ , les indices ordinaire et extraordinaire du spath, pour les raies indiquées par la première colonne. On déduit de là les valeurs de  $\frac{1}{n^2}$ ,  $l^1$ ,  $l^2$  qui servent au calcul d'interpolation. Celui-ci étant disposé comme les précédents ne demande aucune explication.

#### 41. *Spath, rayon ordinaire.*

| Raies. | $y = \frac{1}{n^2}$ . | $\Delta y$ . | $-\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v$ . | $\Delta^2 y$ . | $-\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w$ . | $\Delta^3 y$ . |
|--------|-----------------------|--------------|---|----------------|---|----------------|
| A..... | 0,36726               | + 1275       | -1252                                       | +23            | -19   | +4             |
| B..... | 36600                 | + 1149       | -1138                                       | +11            | - 8   | +3             |
| C..... | 36533                 | + 1082       | -1078                                       | + 4            | - 4   | 0              |
| D..... | 36357                 | + 906        | - 911                                       | - 5            | + 4   | -1             |
| E..... | 36135                 | + 684        | - 696                                       | -12            | + 8   | -4             |
| F..... | 35945                 | + 494        | - 504                                       | -10            | +10   | 0              |
| G..... | 35792                 | + 141        | - 149                                       | - 8            | + 9   | +1             |
| H..... | 35592                 | - 159        | + 154                                       | - 5            | + 7   | +2             |
| L..... | 35135                 | - 316        | + 314                                       | - 2            | + 5   | +3             |
| M..... | 35027                 | - 424        | + 422                                       | - 2            | + 4   | +1             |
| N..... | 34830                 | - 621        | + 619                                       | - 2            | + 2   | 0              |
| O..... | 34620                 | - 831        | + 832                                       | + 1            | - 1   | 0              |
| P..... | 34490                 | - 961        | + 966                                       | + 5            | - 3   | +2             |
| Q..... | 34354                 | - 1097       | +1102                                       | + 5            | - 5   | 0              |
| R..... | 34136                 | - 1315       | +1319                                       | + 4            | - 9   | -5             |

$$\frac{y_a}{u_a} = 0,35451 \quad \Delta y_b = -11455 \quad \Delta^2 y_c = +99$$

$$\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} = -0,001058, \quad \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} = +0,00346.$$

| Raies. | $\nu = l^{-1}$ . | $\Delta\nu$ . | $w$ .  | $\Delta w$ . | $-\frac{\Delta w_b}{\Delta\nu_b} \Delta\nu$ . | $\Delta^2 w$ . |
|--------|------------------|---------------|--------|--------------|---|----------------|
| A....  | 4,709            | - 11,838      | 0,2124 | +0,1276      | -0,0713                                       | +0,0563        |
| B....  | 5,795            | - 10,753      | 1726   | + 878        | - 648   | + 230          |
| C....  | 6,359            | - 10,188      | 1573   | + 725        | - 614   | + 111          |
| D....  | 7,934            | - 8,614       | 1261   | + 413        | - 519   | - 106          |
| E....  | 9,973            | - 6,574       | 1003   | + 155        | - 396   | - 241          |
| F....  | 11,780           | - 4,767       | 848    | + 2          | - 287   | - 285          |
| G....  | 15,143           | - 1,404       | 660    | - 187        | - 85  | - 272          |
| H....  | 18,003           | + 1,456       | 556    | - 292        | + 88  | - 204          |
| L....  | 19,515           | + 2,968       | 512    | - 335        | + 179   | - 156          |
| M....  | 20,533           | + 3,986       | 487    | - 360        | + 240   | - 120          |
| N....  | 22,399           | + 5,852       | 447    | - 401        | + 353   | - 48           |
| O....  | 24,408           | + 7,861       | 410    | - 438        | + 474   | + 36           |
| P....  | 25,679           | + 9,132       | 389    | - 458        | + 550   | + 92           |
| Q....  | 26,964           | + 10,417      | 371    | - 476        | + 628   | + 152          |
| R....  | 29,015           | + 12,468      | 345    | - 503        | + 751   | + 248          |

$$\frac{v_a}{u_a} = 16,547 \quad \Delta v_b = +108,276 \quad \frac{w_a}{u_a} = +0,0847 \quad \Delta w_b = -0,6525 \quad \Delta^2 w_c = +0,2864$$

$$\frac{\Delta^2 v_c}{\Delta^2 w_c} = +0,00346$$

$$\frac{\Delta v_b}{\Delta w_b} = -0,001058$$

$$\frac{v_a}{u_a} = +0,35451$$

$$-c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} = -21 \quad -b \frac{v_a}{u_a} = +1716$$

$$-c \frac{w_a}{u_a} = -29$$

$$c = +0,00346$$

$$b = -0,001037$$

$$a = +0,37138$$

#### 42. *Spath, rayon extraordinaire.*

| Raies. | $\gamma = \frac{1}{n^2}$ . | $\Delta\gamma$ . | $-\frac{\Delta\gamma_b}{\Delta\nu_b} \Delta\nu$ . | $\Delta^2\gamma$ . |
|--------|----------------------------|------------------|---|--------------------|
| A..... | 0,45479                    | + 800            | -796  | + 4                |
| B..... | 45403                      | + 724            | -721  | + 3                |
| C..... | 45363                      | + 684            | -682  | + 2                |
| D..... | 45253                      | + 574            | -574  | 0                  |
| E..... | 45113                      | + 434            | -436  | - 2                |
| F..... | 44992                      | + 313            | -313  | 0                  |
| G..... | 44760                      | + 81             | - 87  | - 6                |
| H..... | 44577                      | - 102            | +103  | + 1                |
| L..... | 44480                      | - 199            | +203  | + 4                |
| M..... | 44413                      | - 266            | +271  | + 5                |
| N..... | 44293                      | - 386            | +392  | + 6                |
| O..... | 44158                      | - 521            | +523  | + 2                |
| P..... | 44075                      | - 604            | +606  | + 2                |
| Q..... | 43987                      | - 692            | +689  | - 3                |
| R..... | 43842                      | - 837            | +821  | -16                |

$$\frac{v_a}{u_a} = 0,44679 \quad \Delta v_b = -7217$$

$$\frac{\Delta v_b}{\Delta w_b} = -0,00086.$$

| Raies. | $\nu = \lambda^{-1}$ . | $\Delta\nu$ . |
|--------|------------------------|---------------|
| A..... | 3,803                  | — 9,248       |
| B..... | 4,671                  | — 8,380       |
| C..... | 5,121                  | — 7,930       |
| D..... | 6,374                  | — 6,677       |
| E..... | 7,988                  | — 5,063       |
| F..... | 9,412                  | — 3,640       |
| G..... | 12,041                 | — 1,010       |
| H..... | 14,253                 | + 1,202       |
| L..... | 15,415                 | + 2,364       |
| M..... | 16,194                 | + 3,143       |
| N..... | 17,614                 | + 4,563       |
| O..... | 19,136                 | + 6,085       |
| P..... | 20,095                 | + 7,044       |
| Q..... | 21,060                 | + 8,009       |
| R..... | 22,591                 | + 9,540       |

$$\frac{\nu_a}{u_a} = 13,051 \quad \Delta\nu_b = +83,896$$

$$\frac{\Delta\nu_b}{\Delta\nu_a} = -0,00086 \quad \frac{\gamma_a}{u_a} = +0,44679$$

$$-b \frac{\nu_a}{u_a} = + \quad 1121$$

$$b = -0,00086 \quad a = +0,45800$$

43. Portons notre attention sur le coefficient  $c$  qui, nous l'avons vu, a par la certitude de sa signification une grande importance théorique. Pour le rayon extraordinaire, sa valeur  $c_e$  est tellement petite que les observations de M. Mascart ne permettent pas de la déterminer. Au contraire, pour le rayon ordinaire, ce terme a la valeur notable  $c_o = +0,00346$ .

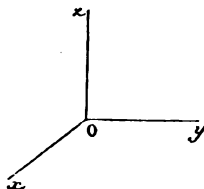
Étudions les conséquences de cette remarque, en nous rappelant que, dans la détermination des indices principaux, le plan de l'onde passe par l'axe du cristal, le prisme ayant ses arêtes parallèles à l'axe.

Soient  $Oz$  l'axe du spath,  $Ox$  et  $Oy$  deux axes perpendiculaires entre eux et à  $Oz$ . Faisons arriver une onde plane parallèle à  $xOz$ .

1. *Système de Fresnel.* — Dans ce système, la vibration du rayon extraordinaire est dirigée suivant  $Oz$  (*fig. 5*); celle du rayon ordinaire, suivant  $Ox$ . Dès lors, la réaction proportionnelle à l'écart est sensiblement nulle pour une elongation parallèle à  $Oz$ , puisque  $c_e$  est in-

sensible; elle a une valeur notable correspondante à  $c_o$  pour toute élongation parallèle à  $Ox$ , et par suite aussi pour toute élongation située dans le plan  $xOy$ . Si l'on fait tourner le plan d'onde autour de  $Ox$ , depuis  $xOz$  jusqu'à  $xOy$ , la vibration ordinaire demeure suivant  $Ox$ ; la réaction proportionnelle à l'écart ne change donc pas, et, par

Fig. 5.



suite, le coefficient de dispersion relatif au rayon ordinaire conserve la valeur  $c_o$  pour toutes les directions d'ondes planes. Au contraire, pour le rayon extraordinaire, la vibration se déplace de  $Oz$  à  $Oy$  et le coefficient  $c$  doit croître de  $c_e$  à  $c_o$ .

II. *Système de Mac Cullagh*. — Pour l'onde plane  $xOz$ , ce système suppose que la vibration du rayon extraordinaire est dirigée suivant  $Ox$ , celle du rayon ordinaire suivant  $Oz$ . Dès lors, le coefficient  $c$  a une valeur notable  $c_o$  pour une vibration parallèle à  $Oz$ ; il a la valeur sensiblement nulle  $c_e$  pour une vibration parallèle à  $Ox$  et, par suite, pour toute vibration située dans le plan  $xOy$ . Si l'on fait tourner le plan d'onde autour de  $Ox$  de  $xOz$  à  $xOy$ , la vibration ordinaire tournera de  $Oz$  à  $Oy$ ; donc pour ce rayon ordinaire  $c$  décroîtra de  $c_o$  à  $c_e$ . Au contraire, la vibration extraordinaire demeurant suivant  $Ox$ , le coefficient  $c$  conservera pour le rayon extraordinaire la valeur insensible  $c_e$ .

En résumé, si l'hypothèse de Fresnel est vraie, le coefficient  $c$  relatif au rayon ordinaire aura la valeur constante  $c_o$ , quelle que soit l'onde plane considérée; il croîtra de  $c_e$  à  $c_o$  pour le rayon extraordinaire. Au contraire, dans le système de Mac Cullagh, le coefficient  $c$  relatif au rayon extraordinaire conservera la valeur insensible  $c_e$ ; pour le rayon ordinaire, il décroîtra de  $c_o$  à  $c_e$ .

A ces conclusions nettement contradictoires, l'expérience répond d'une façon aussi nette, comme on verra plus loin.

44. Ces considérations géométriques suffisent. Elles ont le double avantage d'être intuitives et très générales, n'attribuant pas une forme particulière aux équations de la lumière. Il y a plus, si le langage suppose élongation et force, ce n'est là qu'une fiction commode; en réalité, le raisonnement est général et s'applique à toute autre hypothèse sur la nature de la lumière, pourvu qu'on admette le principe relatif à l'équation différentielle du phénomène lumineux (n° 30); mais il importe de voir comment le terme de Briot affecte les équations auxquelles conduisent les principales théories. Notre assertion sur la généralité du raisonnement géométrique en ressortira d'ailleurs plus nette. Pour simplifier, je supposerai négligeables les termes de dispersion qui contiennent les puissances négatives de  $\lambda$ , de façon à ne conserver que le terme principal et le terme de Briot. Pour que cette simplification soit justifiée, il suffit de considérer les radiations infra-rouges d'une longueur d'onde assez grande; la refuser ne servirait qu'à entraver la démonstration sans changer sa force, en obligeant à des digressions longues et peu fructueuses sur des termes difficiles à bien connaître.

## § II. — Terme de Briot dans les diverses théories de la double réfraction.

45. Je désigne par  $x, y, z$  les coordonnées d'un point du milieu; par  $\xi, \eta, \zeta$  les composantes en ce point du vecteur qu'on appelle généralement *élongation*, mais qui peut représenter tout élément dirigé (vitesse, force, rotation, etc.). Les valeurs de  $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ , composantes de l'accélération, sont dans une première approximation des fonctions linéaires des dérivées secondes de  $\xi, \eta, \zeta$  par rapport à  $x, y, z$ , savoir  $\frac{d^2\xi}{dx^2}, \frac{d^2\xi}{dy^2}, \frac{d^2\xi}{dz^2}, \frac{d^2\xi}{dx dy}, \dots; \frac{d^2\eta}{dx^2}, \dots; \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \dots$ . Si je désigne ces fonctions par  $F, F_1, F_2$ , les équations différentielles s'écrivent, dans cette première approximation,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = F, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = F_1, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = F_2.$$

Tenons compte maintenant du terme de dispersion de Briot. Nous savons qu'à ce terme correspondent *nécessairement* dans les équations

différentielles des termes proportionnels à l'élongation. Les équations seront donc de la forme

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = F - G \xi - H \eta - K \zeta,$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = F_1 - G_1 \xi - H_1 \eta - K_1 \zeta,$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = F_2 - G_2 \xi - H_2 \eta - K_2 \zeta.$$

N'ayant pour objet que le spath, je suppose le cristal muni de trois plans de symétrie rectangulaires, et je choisis ces plans comme plans coordonnés. Les conditions de symétrie réduisent les équations à la forme

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = F - G \xi,$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = F_1 - H \eta,$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = F_2 - K \zeta.$$

Je vais maintenant étudier ces équations, en remplaçant  $F, F_1, F_2$  successivement par les expressions particulières qui résultent de la théorie de Fresnel, puis de celles de MM. Maxwell, Boussinesq, Sarrau, enfin de celles de Lamé, Neumann, Mac Cullagh.

46. *Équations de Lamé.* — Ces équations ordonnées et complétées par les termes de Briot s'écrivent <sup>(1)</sup> :

$$(1) \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \left( B \frac{d^2}{dz^2} + C \frac{d^2}{dy^2} \right) \xi - C \frac{d^2 \eta}{dx dy} - B \frac{d^2 \zeta}{dz dx} - G \xi, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -C \frac{d^2 \xi}{dx dy} + \left( C \frac{d^2}{dx^2} + A \frac{d^2}{dz^2} \right) \eta - A \frac{d^2 \zeta}{dy dz} - H \eta, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -B \frac{d^2 \xi}{dz dx} - A \frac{d^2 \eta}{dy dz} + \left( A \frac{d^2}{dy^2} + B \frac{d^2}{dx^2} \right) \zeta - K \zeta. \end{cases}$$

Je considère une onde plane dont la normale a pour cosinus direc-

---

(1) LAMÉ, *Élasticité*, 2<sup>e</sup> édition, p. 234. Les lettres  $u, v, w; a^2, b^2, c^2$  de Lamé sont remplacées respectivement par  $\xi, \eta, \zeta; A, B, C$ .



teurs  $\alpha, \beta, \gamma$ . Les équations du mouvement de cette onde sont de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = L e^P, & \eta = M e^P, & \zeta = N e^P, \\ P = \frac{2\pi i}{l}(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt), \end{cases}$$

où  $l$  représente la longueur d'onde et  $v$  la vitesse de la lumière dans le cristal;  $L, M, N$  sont les amplitudes des trois vibrations composantes suivant les axes.

Je substitue les valeurs (2) dans les équations (1). La première de ces équations devient

$$\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^2 v^2 \zeta = \left(\frac{2\pi i}{l}\right)^2 [(B\gamma^2 + C\beta^2)\xi - C\alpha\beta\eta - B\gamma\alpha\zeta] - G\xi.$$

Désignant par  $V$  la vitesse de la lumière dans le vide, je divise les deux membres par

$$\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^2 V^2 = -\frac{4\pi^2 V^2}{l^2}.$$

Je rappelle que l'on a, avec les notations précédemment employées,

$$(3) \quad \frac{v^2}{V^2} = \frac{1}{n^2}, \quad \frac{A}{V^2} = a, \quad \frac{G}{4\pi^2 V^2} = g, \quad \dots$$

Il vient

$$\frac{1}{n^2} \xi = (b\gamma^2 + c\beta^2)\xi - c\alpha\beta\eta - b\gamma\alpha\zeta + g\xi.$$

J'ordonne cette équation par rapport à  $\xi, \eta, \zeta$ , et j'écris les deux autres équations qui résultent de même du système (1).

J'obtiens ainsi

$$(4) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{n^2} - b\gamma^2 - c\beta^2 - g\right)\xi + c\alpha\beta\eta + b\gamma\alpha\zeta = 0, \\ c\alpha\beta\xi + \left(\frac{1}{n^2} - c\alpha^2 - a\gamma^2 - h\right)\eta + a\beta\gamma\zeta = 0, \\ b\gamma\alpha\xi + a\beta\gamma\eta + \left(\frac{1}{n^2} - a\beta^2 - b\alpha^2 - k\right)\zeta = 0. \end{cases}$$

Je vais appliquer ces équations au spath d'Islande. Je choisis pour  $Oz$  l'axe optique; pour  $Ox$ , la trace du plan de l'onde sur le plan per-

pendiculaire à  $Oz$ . La normale à l'onde sera dans le plan  $yOz$ , et, si je désigne par  $\theta$  l'angle qu'elle fait avec  $Oz$ , les cosinus directeurs de cette normale auront pour valeurs

$$\alpha = 0, \quad \beta = \sin \theta, \quad \gamma = \cos \theta.$$

On aura d'ailleurs

$$b = a, \quad g = h.$$

Enfin, pour simplifier l'écriture et me conformer à la notation que j'ai employée dans les formules de dispersion, je remplacerai les lettres

$$a, b, c; \quad g, h, k; \quad \frac{1}{n^2}$$

respectivement par

$$a, a, a'; \quad c, c, c'; \quad s.$$

Les équations précédentes s'écrivent alors

$$(5) \quad \begin{cases} (s - a \cos^2 \theta - a' \sin^2 \theta - cl^2) \xi = 0, \\ (s - a \cos^2 \theta - cl^2) \eta + a \sin \theta \cos \theta \zeta = 0, \\ a \sin \theta \cos \theta \eta + (s - a \sin^2 \theta - c'l^2) \zeta = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont satisfaites par

$$(6) \quad s = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + cl^2, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

La vibration est dirigée suivant  $Ox$ ; elle répond au rayon extraordinaire; la vitesse de propagation, représentée par la première de ces trois formules, donne en particulier :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } \theta = 0 \dots\dots\dots & s_0 = a + cl^2 \\ \text{Pour } \theta = 1^{\text{dr}} \dots\dots\dots & s_1 = a' + cl^2 \end{array}$$

Si la valeur de  $l^2 = \frac{\lambda^2}{n^2}$  était la même dans ces deux égalités, en les multipliant respectivement par  $\cos^2 \theta$  et  $\sin^2 \theta$ , et ajoutant, on obtiendrait

$$s_0 \cos^2 \theta + s_1 \sin^2 \theta = s,$$

qui représente la loi connue des vitesses de propagation du rayon extraordinaire. Comme l'hypothèse n'est pas exacte, cette loi est légèrement altérée.

On peut encore satisfaire aux équations (5) en posant

$$(7) \quad \begin{vmatrix} s - a \cos^2 \theta - cl^2 & a \sin \theta \cos \theta \\ a \sin \theta \cos \theta & s - a \sin^2 \theta - c'l^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{aligned} \xi &= 0, \\ \frac{\eta}{\xi} &= \frac{a \sin \theta \cos \theta}{-s + a \cos^2 \theta + cl^2}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi deux vibrations dans le plan des  $yz$ . Si l'on néglige  $c$  et  $c'$ , ces solutions deviennent

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & s = 0, \quad \frac{\eta}{\xi} = \tan \theta; \\ 2^\circ \quad & s = a, \quad \frac{\eta}{\xi} = -\cot \theta. \end{aligned}$$

La première représente une vibration longitudinale incapable de se propager; la seconde donne une vibration transversale, dans le plan de polarisation, et qui se propage avec une vitesse constante. Elle répond au rayon ordinaire. Si l'on tient compte maintenant des termes en  $c$  et  $c'$ , les vibrations restent dans le plan de polarisation  $yOz$ , mais deviennent quasi longitudinale et quasi transversale. Pour la première, qui est parasite,  $s$  est de l'ordre de  $cl^2$ . Pour le rayon ordinaire, la valeur de  $s$  s'obtient en développant et ordonnant l'équation (7). Il vient ainsi

$$s^2 - [a + (c + c')l^2]s + a(c \sin^2 \theta + c' \cos^2 \theta)l^2 + cc'l^4 = 0$$

et, en résolvant,

$$s = \frac{a + (c + c')l^2}{2} + \sqrt{\left[ \frac{a + (c + c')l^2}{4} \right]^2 - a(c \sin^2 \theta + c' \cos^2 \theta)l^2 - cc'l^4}.$$

Les lois relatives au rayon ordinaire sont donc altérées par les termes de Briot. Si l'on néglige les termes du second ordre par rapport à  $\frac{cl^2}{a}$  et  $\frac{c'l^2}{a}$ , la dernière formule donne

$$(8) \quad s = a + (c \cos^2 \theta + c' \sin^2 \theta)l^2.$$

On a, en particulier,

$$\begin{aligned} \text{Pour } \theta = 0 & \dots \dots \dots s_0 = a + cl^2 \\ \text{Pour } \theta = 1^\text{dr} & \dots \dots \dots s_1 = a + c'l^2 \end{aligned}$$

Les formules (6) et (8), relatives aux vitesses du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire, sont tout à fait accessibles à l'expérience; elles sont conformes aux conséquences que nous avons tirées par la Géométrie (n° 43) de l'hypothèse de Neumann et Mac Cullagh.

47. *Équations de M. Boussinesq* <sup>(1)</sup>. — Ordonnées et complétées par les termes de Briot, elles s'écrivent

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \left[ \left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \xi - \frac{d^2}{dx dy} \eta - \frac{d^2}{dz dx} \zeta \right] - G \xi, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = B \left[ -\frac{d^2}{dx dy} \xi + \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dx^2} \right) \eta - \frac{d^2}{dy dz} \zeta \right] - H \eta, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = C \left[ -\frac{d^2}{dz dx} \xi - \frac{d^2}{dy dz} \eta + \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \zeta \right] - K \zeta. \end{cases}$$

En substituant dans ces équations les valeurs (2) (n° 46), comme précédemment, j'obtiens les équations

$$(4') \quad \begin{cases} \left[ \frac{1}{n^2} - a(\beta^2 + \gamma^2) - g l^2 \right] \xi - a \alpha \beta \cdot \eta - a \alpha \gamma \cdot \zeta = 0, \\ -b \alpha \beta \cdot \xi + \left[ \frac{1}{n^2} - b(\gamma^2 + \alpha^2) - h l^2 \right] \eta - b \beta \gamma \cdot \zeta = 0, \\ -c \gamma \alpha \cdot \xi - c \beta \gamma \cdot \eta + \left[ \frac{1}{n^2} - c(\alpha^2 + \beta^2) - k l^2 \right] \zeta = 0. \end{cases}$$

Appliquées au spath avec le choix d'axes et le changement de notations expliqué précédemment (n° 46), les équations (4') deviennent

$$(5') \quad \begin{cases} (s - a - c l^2) \xi = 0, \\ + (s - a' \cos^2 \theta - c l^2) \eta - a \sin \theta \cos \theta \cdot \zeta = 0, \\ - a' \sin \theta \cos \theta \cdot \eta + (s - a' \sin^2 \theta - c l^2) \zeta = 0. \end{cases}$$

Ces équations admettent d'abord la solution

$$(6') \quad s = a + c l^2, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Elle répond au rayon ordinaire dont les lois ne sont pas altérées ici par les termes de Briot : la vibration, dirigée suivant  $Ox$ , se propage

---

<sup>(1)</sup> Voir M. POINCARÉ. *Théorie mathématique de la lumière*, p. 277 (n° 176).

avec une vitesse constante quelle que soit l'orientation du rayon lumineux.

On a ensuite deux autres solutions données par les équations

$$(7') \quad \begin{cases} s^2 - [a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + (c + c') l^2] s \\ \quad + (ac' \cos^2 \theta + ca' \sin^2 \theta) l^2 + cc' l^4 = 0, \\ \xi = 0, \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{a \sin \theta \cos \theta}{s - a \cos^2 \theta - cl^2}. \end{cases}$$

Les vibrations sont dans le plan  $yOz$ ; quand on néglige  $c$  et  $c'$ , on obtient

$$1^\circ \quad s = 0, \quad \frac{\eta}{\xi} = -\tan \theta;$$

$$2^\circ \quad s = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta, \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{a}{a'} \cot \theta.$$

De ces deux solutions, la première représente une vibration longitudinale parasite sans vitesse de propagation; la seconde, une vibration quasi transversale répondant au rayon extraordinaire.

Tenant compte maintenant des termes  $c$  et  $c'$ , nous aurons d'abord une vibration quasi longitudinale, dont la vitesse de propagation est de l'ordre de  $cl^2$ ; puis, pour le rayon extraordinaire, une vibration quasi transversale: la vibration est dans un azimuth perpendiculaire au plan de polarisation et la vitesse de propagation est donnée par la formule

$$s = \frac{a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + (c + c') l^2}{2} + \sqrt{\frac{[a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + (c + c') l^2]^2}{4} - (ac' \cos^2 \theta + ca' \sin^2 \theta) l^2 - cc' l^4}$$

ou, en négligeant le second ordre relativement aux rapports de  $cl^2$  et  $c'l^2$  à  $a$  et  $a'$ ,

$$(8') \quad s = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + \frac{ac \cos^2 \theta + a' c' \sin^2 \theta}{a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta} l^2.$$

Faisant successivement  $\theta = 0$  et  $\theta = 1^{\text{dr}}$ , il vient

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } \theta = 0. & s_0 = a + cl^2 \\ \text{Pour } \theta = 1^{\text{dr}}. & s_1 = a' + c'l^2 \end{array}$$

On n'a pas exactement

$$s = s_0 \cos^2 \theta + s_1 \sin^2 \theta,$$

mais la différence entre les deux membres est très petite, comme on le verra (n° 97). La loi de la vitesse du rayon extraordinaire n'est donc pas sensiblement altérée.

48. *Équations de M. Poincaré.* — M. Poincaré a montré <sup>(1)</sup> que les résultats de la théorie de Fresnel conduisent aux équations

$$(1'') \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \xi - B \frac{d^2}{dx dy} \eta - C \frac{d^2}{dz dx} \zeta, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -A \frac{d^2}{dx dy} \xi + B \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dx^2} \right) \eta - C \frac{d^2}{dy dz} \zeta, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -A \frac{d^2}{dz dx} \xi - B \frac{d^2}{dy dz} \eta + C \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \zeta. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients symboliques de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  se déduit de celui de M. Boussinesq en le faisant tourner autour de sa diagonale principale. Si donc on introduit les termes de Briot, on obtiendra la même équation pour les vitesses de propagation. La vibration ordinaire sera dirigée suivant  $Ox$ . La vibration du rayon extraordinaire est transversale quand on néglige  $c$  et  $c'$ , mais quasi transversale quand on en tient compte. Une vibration quasi longitudinale parasite se propage avec une vitesse qui est de l'ordre de  $cl^2$  et  $c'l^2$ .

On arrive à des conséquences tout à fait analogues en partant des équations

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= A \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \xi - \frac{d}{dx} \left( A \frac{d}{dx} \xi + B \frac{d}{dy} \eta + C \frac{d}{dz} \zeta \right) - A \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta \right), \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= B \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \eta - \frac{d}{dy} \left( A \frac{d}{dx} \xi + B \frac{d}{dy} \eta + C \frac{d}{dz} \zeta \right) - B \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta \right), \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= C \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \zeta - \frac{d}{dz} \left( A \frac{d}{dx} \xi + B \frac{d}{dy} \eta + C \frac{d}{dz} \zeta \right) - C \frac{d}{dz} \left( \frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta \right), \end{aligned}$$

qui répondent à la forme attribuée à l'équation de la surface de pola-

---

<sup>(1)</sup> *Théorie mathématique de la lumière*, p. 257.

risation par M. Poincaré (1), savoir

$$\Pi = (A x^2 + B y^2 + C z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(A \alpha x + B \beta y + C \gamma z)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

L'auteur a montré que cette forme satisfait aussi aux lois de Fresnel relatives aux deux rayons lumineux. Il importe d'ajouter qu'elle donne lieu à des vibrations longitudinales; en ce sens, elle ne répond pas aux idées de Fresnel.

De leur côté, les équations (1'') ne sont pas l'expression des principes du grand physicien, mais donnent seulement les mêmes résultats; il n'est donc pas étonnant que l'addition des termes de Briot dans les seconds membres de ces équations conduise à des résultats contraires à ces principes : vibration lumineuse à peu près transversale au lieu de l'être rigoureusement, vibration quasi longitudinale parasite.

49. *Théorie de Fresnel.* — Prenons maintenant pour point de départ les principes mêmes de Fresnel, ou mieux, les hypothèses équivalentes, mais plus correctes, par lesquelles M. Poincaré les remplace, savoir :

1° L'éther offre une résistance infinie à la compression.

2° L'ellipsoïde de polarisation est indépendant du plan de l'onde. L'équation d'incompressibilité est, comme on sait,

$$\frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta = 0.$$

Pour une onde plane, dont la normale a pour cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ , cette équation devient

$$\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta = 0.$$

Elle constitue donc une *liaison* par laquelle le mouvement a nécessairement lieu dans le plan de l'onde. D'après cela, la seule composante efficace d'une force quelconque est sa projection sur le plan d'onde. C'est le principe admis par Fresnel pour les réactions élastiques de

---

(1) *Théorie mathématique de la lumière*, p. 257, équation (7).

l'éther, et qui doit être étendu à toute force, en particulier à celle de Briot.

En second lieu, l'ellipsoïde de polarisation étant supposé fixe, ses axes coïncident en direction avec ceux du cristal; son équation est donc

$$(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 1.$$

Pour remonter de là aux forces élastiques de l'éther, il suffit de prendre les demi-dérivées par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  et de remplacer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  respectivement par  $\frac{d}{dx}$ ,  $\frac{d}{dy}$ ,  $\frac{d}{dz}$ ;  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  devient  $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ , symbole qu'on a l'habitude de désigner par  $\Delta$ . Il vient ainsi, pour les trois composantes de la force élastique,  $A\Delta\xi$ ,  $B\Delta\eta$ ,  $C\Delta\zeta$ . A ces forces, s'ajoutent les termes de Briot  $-G\xi$ ,  $-H\eta$ ,  $-K\zeta$ , et les composantes de la réaction de liaison  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ . D'après cela, les équations complètes, avec la condition de liaison, s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = (A\Delta - G)\xi + N, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = (B\Delta - H)\eta + P, & \frac{d}{dx}\xi + \frac{d}{dy}\eta + \frac{d}{dz}\zeta = 0. \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = (C\Delta - K)\zeta + Q, \end{cases}$$

Dans ces équations, je remplace  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  par les valeurs (2), n° 46. La réaction de liaison étant alors normale au plan d'onde,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  deviennent proportionnels à  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Il vient donc, avec les notations adoptées (3), n° 46, et en appelant  $r$  la valeur algébrique de la réaction de liaison,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{n^2}\xi = (a + g l^2)\xi + \alpha r, \\ \frac{1}{n^2}\eta = (b + h l^2)\eta + \beta r, & \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0. \\ \frac{1}{n^2}\zeta = (c + k l^2)\zeta + \gamma r, \end{cases}$$

Ces quatre équations homogènes par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $r$  ne sont satisfaites que pour les valeurs de  $\frac{1}{n^2}$  qui annulent le déterminant de



leurs coefficients : elles déterminent alors des quantités proportionnelles à ces inconnues. J'applique ces équations au spath, avec le changement de notations et le choix d'axes précédemment employés (n° 46). Il vient

$$(5) \quad \begin{cases} s\zeta = (a + c l^2) \zeta, \\ s\eta = (a + c l^2) \eta + r \sin \theta, \\ s\zeta = (a' + c' l^2) \zeta + r \cos \theta, \end{cases} \quad \eta \sin \theta + \zeta \cos \theta = 0.$$

On n'a plus que deux solutions pour le problème, la quatrième équation (5) mettant obstacle aux vibrations longitudinales. La première est

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad r = 0, \quad s = a + c l^2.$$

La vibration est dirigée suivant  $Ox$  : sa vitesse de propagation est constante, quelle que soit la direction du plan d'onde. Les propriétés du rayon ordinaire ne sont pas changées par l'introduction des termes de Briot.

La deuxième solution répond au rayon extraordinaire, elle donne

$$\zeta = 0, \quad \frac{\eta}{\zeta} = -\cot \theta.$$

La vibration est donc dans le plan d'onde perpendiculaire à la première; c'est bien la loi de Fresnel. La vitesse de propagation s'obtient en tirant  $\eta$  et  $\zeta$  des deuxième et troisième équations (5) et portant dans la quatrième. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} r &= \frac{r \sin \theta}{s - a - c l^2}, & \zeta &= \frac{r \cos \theta}{s - a' - c' l^2}, \\ r \left[ \frac{\sin^2 \theta}{s - a - c l^2} + \frac{\cos^2 \theta}{s - a' - c' l^2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

La dernière donne, pour la vitesse de propagation,

$$s = (a + c l^2) \cos^2 \theta + (a' + c' l^2) \sin^2 \theta.$$

Cette formule reproduirait exactement la loi de Fresnel pour la vitesse du rayon extraordinaire, si  $l$  était indépendant de  $n$ .

Comme il n'en est pas ainsi, cette loi est légèrement altérée.

50. Voici une remarque intéressante qui résulte des observations de M. Poincaré <sup>(1)</sup>. L'hypothèse sur la fixité de l'ellipsoïde de polarisation n'est pas nécessaire pour arriver aux lois de Fresnel : il suffit que son équation soit de la forme

$$\begin{aligned} \Pi = & (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ & + 2D(A\alpha\xi + B\beta\eta + C\gamma\zeta)(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) + E(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)^2 = 1, \end{aligned}$$

qui reproduit celle qu'on a précédemment adoptée, en faisant

$$D = E = 0.$$

En effet, si l'on adopte cette nouvelle forme plus générale, il faut, dans les deux membres des équations (4), ajouter les termes qui proviennent des nouveaux termes de  $\Pi$  et qui s'en déduisent en les dérivant par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . La demi-dérivée par rapport à  $\xi$  donne

$$(DA + E)\alpha(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) + \alpha D(A\alpha\xi + B\beta\eta + C\gamma\zeta).$$

Le premier de ces deux termes est nul en vertu de la liaison; le deuxième terme se compose de deux facteurs, dont l'un est  $\alpha$  et l'autre une fonction symétrique. On pourra donc, en mettant  $\alpha$  en facteur, joindre ce terme au terme de liaison  $\alpha r$  de la première équation (4). Si donc on désigne maintenant par  $r$  l'ancienne valeur de  $r$  augmentée de cette fonction symétrique  $A\alpha\xi + B\beta\eta + C\gamma\zeta$ , les équations (4) conservent la même forme et conduisent aux mêmes conséquences. On le voit, les termes ajoutés dans l'équation de l'ellipsoïde de polarisation n'ont pour effet que de changer la réaction de la liaison. En particulier, cette remarque s'applique aux équations déjà signalées de M. Poincaré (n° 48), en faisant  $D = -1$ ,  $E = 0$ . Elle s'applique aussi aux premières équations de M. Poincaré qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= A \Delta\xi - \frac{d}{dx} \left( A \frac{d\xi}{dx} + B \frac{d\eta}{dy} + C \frac{d\zeta}{dz} \right), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= B \Delta\eta - \frac{d}{dy} \left( A \frac{d\xi}{dx} + B \frac{d\eta}{dy} + C \frac{d\zeta}{dz} \right), \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= C \Delta\zeta - \frac{d}{dz} \left( A \frac{d\xi}{dx} + B \frac{d\eta}{dy} + C \frac{d\zeta}{dz} \right), \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> *Théorie mathématique de la lumière*, p. 156 et 157.

quoique ces équations ne donnent pas lieu à un ellipsoïde de polarisation proprement dit. On voit que notre remarque s'applique également aux équations de M. Boussinesq, dont la première se met sous la forme

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \Delta \xi - A \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta \right).$$

### § III. — Sur l'incompressibilité de l'éther.

51. De ce qui précède résulte un moyen de conclure sur l'incompressibilité de l'éther, ou, si l'on préfère le langage des faits à celui des hypothèses, sur la transversalité rigoureuse des vibrations. Nous avons dit que seules les théories du groupe de Fresnel restent à discuter, l'hypothèse de Mac Cullagh et Neumann conduisant à des conclusions nettement contraires aux faits de la dispersion, et nous avons trouvé que, si l'on assujettit les vibrations lumineuses à être rigoureusement transversales, les équations différentielles de toutes les théories connues de ce groupe conduisent à la même formule, non seulement pour le rayon ordinaire, mais aussi pour l'indice du rayon extraordinaire, savoir

$$(1) \quad \frac{1}{n^2} = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + (c \cos^2 \theta + c' \sin^2 \theta) l^2.$$

La condition de transversalité supprimée, le premier terme peut bien conserver la même forme, comme dans les théories de MM. Boussinesq, Sarrau, Maxwell, comme aussi avec les équations de M. Poincaré; mais le terme de Briot est changé. Dans ces cas, nous avons en effet trouvé

$$(2) \quad \frac{1}{n^2} = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + \frac{ac \cos^2 \theta + a' c' \sin^2 \theta}{a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta} l^2.$$

La différence entre les formules (1) et (2), quoique faible, est accessible à l'expérience, comme on verra plus loin (n° 100). L'expérience peut donc un jour renseigner sur la rigoureuse transversalité des vibrations.

52. Pour donner plus de généralité à ce résultat, j'en reprends

l'étude par la méthode géométrique, dont j'ai déjà signalé les avantages (n° 44).

Soient

$C$  la réaction de Briot pour un déplacement égal à 1 suivant  $Oy$  (*fig. 6*);

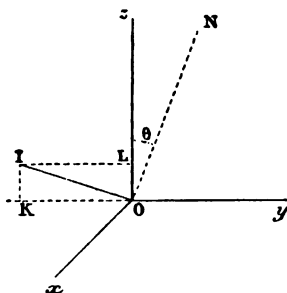
$C'$  la réaction de Briot pour un déplacement égal à 1 suivant  $Oz$ ;

$ON$  la normale au plan d'onde, située dans le plan  $yOz$ ;

$\theta$  l'angle que fait cette normale avec l'axe optique  $Oz$ ;

$OI$  l'élongation rigoureusement transversale et égale à 1.

Fig. 6.



Je décompose  $OI$  suivant  $Oy$  et  $Oz$  en deux composantes

$$OK = \cos \theta, \quad OL = \sin \theta.$$

Ces composantes donnent lieu aux forces

$$\begin{array}{ll} C \cos \theta & \text{suivant } Oy, \\ C' \sin \theta & \text{» } Oz, \end{array}$$

dont les composantes efficaces, dirigées suivant  $OI$ , sont

$$C \cos^2 \theta \text{ et } C' \sin^2 \theta.$$

Le terme de dispersion de Briot sera donc, quelles que soient les réactions élastiques de l'éther,

$$(c \cos^2 \theta + c' \sin^2 \theta) l^2.$$

Si la vibration n'est pas rigoureusement transversale et fait avec le plan de l'onde un angle constant  $\omega$ , compté positivement quand la vibra-

tion se rapproche de l'axe  $Oz$ , on trouve de même, pour le terme de Briot,

$$[c \cos^2(\theta + \omega) + c' \sin^2(\theta + \omega)]l^2.$$

Si l'on connaît  $c$ ,  $c'$ ,  $\theta$  et la valeur numérique du coefficient de  $l^2$ , on peut, jusqu'à un certain point, en déduire  $\omega$  regardé comme indépendant de  $\lambda$ . Ainsi, sans admettre d'autre idée préconçue que le principe fondamental adopté (n° 30), on peut, par l'étude expérimentale du terme de Briot, non seulement savoir si la vibration est dans le plan de l'onde, mais encore mesurer jusqu'à un certain point l'angle qu'elle fait avec ce plan. Ce dernier résultat est, il est vrai, moins certain, car l'angle  $\omega$  peut varier un peu quand on passe d'une radiation à une autre.

#### § IV. — Vérification expérimentale des théories précédentes.

53. Mes observations, je dois le dire, ne permettent pas de résoudre cet important problème de la transversalité rigoureuse des vibrations; mais elles touchent de bien près à la solution, et je ne doute pas que celle-ci ne puisse être atteinte par des moyens supérieurs à ceux dont j'ai pu disposer. Donc je m'abstiendrai de conclure dans ce Mémoire sur l'incompressibilité de l'éther, pour m'attacher seulement aux hypothèses de Fresnel et de Mac Cullagh et Neumann; mais je ferai l'examen expérimental de ces hypothèses avec tous les soins et tous les développements que mérite une si grave controverse.

54. Tout d'abord, il faut assurer la base de l'analyse précédente par une bonne détermination des coefficients de dispersion  $c$  et  $c'$  relatifs aux deux indices principaux. Les valeurs déduites des nombres de M. Mascart n'ont pas une précision suffisante. Cette base, solidement posée, je rappelle les conclusions à vérifier. Dans l'*hypothèse de Fresnel*, le coefficient du terme de Briot a la valeur constante  $c_o$  pour le rayon ordinaire; ce coefficient augmente de  $c_e$  à  $c_o$  pour le rayon extraordinaire quand l'angle de l'onde plane avec l'axe croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Dans le *système de Neumann*, c'est l'inverse : constant pour le rayon extraordinaire, il décroît de  $c_o$  à  $c_e$  pour le rayon ordinaire.

55. Voici d'abord un fait incontesté :

*L'indice de réfraction de chaque radiation est constant pour le rayon ordinaire, quelle que soit la direction de l'onde plane.*

Compatible avec la première hypothèse, cette loi est manifestement contraire à la deuxième. Quelle est donc sa certitude? Quelles expériences ont été faites pour la contrôler? Verdet rapporte <sup>(1)</sup> celle de Brewster <sup>(2)</sup>, qui est seulement qualitative, et celles de Swan <sup>(3)</sup>. Ce savant mesure l'indice ordinaire du spath au moyen de prismes taillés dans différentes directions; il emploie la méthode du minimum de déviation et opère avec la lumière de l'alcool salé. Il obtient les résultats suivants :

|                                       | Indice ordinaire<br>du spath. |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| Rayon réfracté parallèle à l'axe..... | 1,658367                      |
| » perpendiculaire à l'axe.....        | 66                            |
| » " " ".....                          | 61                            |
| » " " ".....                          | 84                            |
| » à 45° de l'axe.....                 | 85                            |
| » à 60° de l'axe.....                 | 89                            |
| Moyenne.....                          | 1,658375                      |

Les différences ne portent que sur le cinquième chiffre décimal; elles sont de l'ordre des erreurs d'observation. D'autre part, pour la raie D et d'après les calculs précédents (nos 41 et 42), la valeur de  $c_o/l^2$  serait 0,000436, tandis que celle de  $c_e/l^2$  est négligeable. Ainsi, dans l'hypothèse de Neumann, l'indice ordinaire varierait d'environ 43,6 unités du cinquième chiffre décimal, quand on passe du rayon parallèle au rayon perpendiculaire à l'axe optique du spath. La réponse est éclatante.

56. Cependant, malgré leur précision, ces expériences laissent place au doute : peut-être une compensation s'établit-elle entre la variation du terme de Briot et celle des autres termes de dispersion, de façon à maintenir approximativement la constance de l'indice ordinaire de la

(1) *Leçons d'Optique physique*, t. I, p. 530.

(2) 13<sup>th</sup> Rep. of. Brit. Assoc., p. 7.

(3) *Edinb. Trans.*, t. XVI, p. 375.

raie D? Pour lever cette objection, il faut observer les indices ordinaires dans une grande étendue du spectre. La constance de tous ces indices entraînera nécessairement celle du terme de Briot et même aussi celle des autres termes de dispersion. Telles sont les vérifications faciles et décisives qu'on peut opérer sur le rayon ordinaire.

57. Pour faire la démonstration plus complète, on doit étudier la variation du terme de Briot pour le rayon extraordinaire. Aucune vérification n'a été faite dans ce sens; cependant on sait que, pour une onde plane perpendiculaire à l'axe, le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire coïncident. La constance du coefficient  $c$  du rayon ordinaire une fois établie, il résulte de cette loi que, pour le rayon extraordinaire, le coefficient de Briot varie de  $c_e$  à  $c_o$ , quand l'angle de l'onde plane avec l'axe du cristal varie de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Mais, cette démonstration a l'inconvénient de faire rentrer la nouvelle vérification dans la première, relative au rayon ordinaire; aussi déterminerai-je les valeurs du terme de Briot, pour le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire, dans un azimut intermédiaire entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

58. Voici le plan d'expériences que ces considérations m'ont conduit à adopter :

1° Reprendre la détermination des formules de dispersion pour les indices principaux du spath;

2° Mesurer les indices ordinaire et extraordinaire des différentes radiations pour une onde plane faisant avec l'axe un angle constant connu, de façon à en déduire les formules de dispersion pour les deux rayons dans cette direction.

Les grandes longueurs d'onde influent le plus sur le terme de dispersion de Briot : des calculs précédents il résulte (nos 35, 36, 37, 41, 42) que, dans le spectre ultra-violet, le terme de Briot est négligeable; dans le spectre visible il est sensible, pour devenir prépondérant dans le spectre infra-rouge. Les courbes montrent ces faits avec évidence. J'ai donc borné à ces deux dernières régions du spectre mes recherches qui, à cet égard, se divisent en deux parties :

1° Observations des raies de Fraunhofer avec le goniomètre ordinaire;

2° Observations des radiations calorifiques par la méthode de M. Mouton.

La précision des pointés est au moins dix fois plus forte dans le premier cas que dans le second; de là la nécessité, pour les premières observations, d'une étude minutieuse des erreurs systématiques; cette étude devient à peu près inutile dans le second cas.

---

## CHAPITRE IV.

### ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR LE SPATH D'ISLANDE.

---

#### § I. — Observations dans le spectre visible.

##### GONIOMÈTRE ET PRISME.

59. Ces observations ont été faites à l'École Polytechnique, au laboratoire de M. Cornu, avec un goniomètre de Babinet, construit par MM. Brunner. Cet admirable instrument, que mon ancien professeur m'a fait l'honneur de me confier, a été décrit par lui-même <sup>(1)</sup>. Le cercle est divisé dans le sens des aiguilles d'une montre; la division extrême du vernier donne les 3". Je comptais employer aussi le prisme de spath qui lui a servi dans son second Mémoire sur le spectre normal du Soleil <sup>(2)</sup>. L'utilisant lui-même pour la suite de ce travail, M. Cornu a poussé la bienveillance jusqu'à m'offrir d'en commander un à mon gré à M. Pellin.

Voici la taille que j'ai adoptée.

60. Soit *decg*, *afbh*, *d'e'...* le rhomboèdre de spath, appuyant par sa face *d'e'c'g'* sur le plan vertical et ayant son axe *ac*, *a'c'* horizontal. Le

---

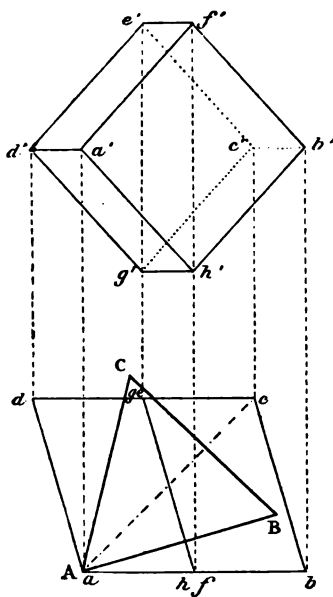
<sup>(1)</sup> *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 15.

<sup>(2)</sup> *Ibid.*, 2<sup>e</sup> série, t. IX; 1880.



plan horizontal de cet axe découpe dans le cristal un parallélogramme  $abcd$ . Je choisis les bases du prisme parallèles à ce plan; par suite, les arêtes sont verticales. Enfin, pour définir l'orientation des faces latérales du prisme, je mène deux plans  $AB$ ,  $AC$  (*fig. 7*), faisant avec l'axe  $ac$  des

Fig. 7.



angles de  $30^\circ$ , puis un troisième plan  $BC$  perpendiculaire à l'axe. J'obtiens ainsi le prisme équilatéral  $ABC$ , tel que l'axe est, dans le plan de la section droite, la bissectrice de l'angle  $\hat{A}$ . Pour reconnaître les angles, j'ai inscrit les lettres  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , en tournant de droite à gauche sur la base supérieure. Des petites faces naturelles, que j'ai fait conserver comme faces témoins sur les sommets, permettent de définir exactement l'orientation cristallographique des faces du prisme.

61. Les avantages que j'ai trouvés dans cette taille sont les suivants : d'abord les faces naturelles laissées sur les arêtes verticales  $A$  et  $C$  sont très propres à définir la position de l'axe dans le plan de la base du prisme; puis, si l'on observe successivement à travers les trois angles  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , l'onde plane passera par l'axe, puis fera avec lui, de

part et d'autre, des angles de  $30^\circ$ . Pour le rayon ordinaire, on pourra vérifier la constance de l'indice; de plus, les deux positions symétriques devant, dans toutes les théories, donner le même indice, la variation de celui-ci fera connaître la grandeur des erreurs accidentelles. Pour le rayon extraordinaire, l'observation à travers A donne l'indice minimum; puis la double observation à travers les angles B et C constitue un retournement qui permet d'éliminer l'erreur provenant de l'indécision sur la position de l'axe optique.

## MÉTHODES D'OBSERVATION.

62. Le réglage a été fait par les méthodes de M. Cornu <sup>(1)</sup>, sauf de légères modifications que j'indiquerai. Pour la mesure de l'angle réfringent, on connaît deux procédés : le premier, utilisant l'*oculaire nadiral* qui permet de pointer le réticule sur son image par réflexion normale, a dû être abandonné parce que la lunette ne possédait plus cet oculaire. J'ai alors employé la méthode qui consiste à mesurer le double de l'angle réfringent : on pointe avec la lunette successivement les images de la fente du collimateur réfléchies par les deux faces du prisme.

Contrairement à une opinion assez répandue, cette méthode peut donner d'aussi bons résultats que la première, pourvu qu'on ait soin d'éliminer les erreurs systématiques.

Pour l'indice du rayon ordinaire, la méthode employée est celle du minimum de déviation; elle s'applique au rayon extraordinaire observé à travers l'angle A; mais, dans les angles B et C, la variation de l'indice avec la position du rayon lumineux fait que, dans la position du minimum de déviation, les rayons incident et émergent cessent d'occuper des positions symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle réfringent, et la formule classique

$$n = \frac{\sin \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

---

<sup>(1)</sup> *Spectre normal du Soleil*, 2<sup>e</sup> Partie (*Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. X : 1880).

n'est plus vraie. Il faudrait employer les formules de M. Cornu <sup>(1)</sup>, qui exigent la mesure difficile des angles d'incidence et d'émergence. Il y a plus, les diverses radiations inégalement réfrangibles suivraient dans le cristal des chemins différents, circonstance peu favorable à l'étude de la dispersion dans une direction déterminée. J'ai préféré faire l'observation dans la position symétrique, de façon que, dans le cristal, le rayon lumineux soit toujours perpendiculaire à la bissectrice de l'angle réfringent. J'ai utilisé dans ce but l'image du collimateur réfléchi sur la troisième face du prisme.

63. Il suffirait, en effet, de faire coïncider l'image réfléchi et l'image réfractée si la troisième face était rigoureusement perpendiculaire à la bissectrice de l'angle réfringent; mais il n'en est pas ainsi. Soient

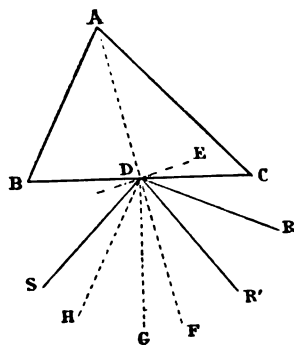
ABC la section droite du prisme (*fig. 8*);

ADF la bissectrice de l'angle A;

DG la normale à BC.

On peut assimiler le rayon réfracté dans la position symétrique à un rayon réfléchi sur une face idéale DE, dont la normale est ADF. Dès

Fig. 8.



lors, soient SD le rayon incident, DR et DR' les rayons réfléchis sur les faces DE, BC. J'imagine que toutes les droites menées par D sont limi-

<sup>(1)</sup> *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 238.

tées à un cercle qui a pour centre ce point, puis je mesure les angles par les arcs interceptés sur sa circonférence et comptés positivement de gauche à droite, dans le sens de la graduation du goniomètre. On a ainsi

$$(1) \quad \text{lecture } R' - \text{lecture } R = RR' = 2FG.$$

Pour évaluer FG au moyen des angles du triangle, je mène DH parallèle à AB; il vient

$$FG = FH + HB + BG.$$

Or on a

$$FH = + \frac{\hat{A}}{2}, \quad HB = + B; \quad BG = - \frac{\pi}{2}.$$

Portant ces valeurs dans l'égalité (1), j'obtiens

$$\text{lecture } R' - \text{lecture } R = \hat{A} + 2\hat{B} - \pi = \hat{B} - \hat{C}.$$

Si l'on désigne par *réfl.* la lecture du cercle gradué pour la position de la lunette pointant le rayon réfléchi, par *réfrac.* la lecture pour le rayon réfracté, enfin, si l'on joint au précédent résultat ceux qu'on obtient pour les autres angles, on a

$$\begin{array}{ll} \text{A travers A, réfl. — réfrac.} & \dots\dots\dots \hat{B} - \hat{C} \\ \text{» B, »} & \dots\dots\dots \hat{C} - \hat{A} \\ \text{» C, »} & \dots\dots\dots \hat{A} - \hat{B} \end{array}$$

64. Avant de passer à l'étude des causes d'erreurs, il importe de savoir avec quelle précision il faut pointer l'image réfléchiée pour que l'erreur commise sur ce pointé n'entraîne pas une erreur sensible sur la valeur de l'indice. L'indice  $n$  du rayon extraordinaire qui fait avec l'axe optique du cristal un angle  $\theta$  est donné par la formule

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \theta,$$

où  $n_o$  et  $n_e$  représentent les indices principaux ordinaire et extraordinaire.

Cette formule différentiée donne

$$dn = -\frac{n^3}{2} \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \sin 2\theta d\theta.$$

Si l'on fait  $\theta = 30^\circ$ , puis qu'on remplace les indices par les valeurs relatives à la raie D, et  $d\theta$  par la mesure trigonométrique de l'arc de  $1'$ , on trouve

$$dn = 0,000\,047.$$

Si donc on veut que  $dn$  ne dépasse pas  $\frac{1}{2}$  unité du cinquième chiffre décimal, il faudra que  $d\theta$  ne dépasse pas  $0',1$ . D'ailleurs, la variation  $d\theta$  égale la variation  $dr$  de l'angle de réfraction; or, de la formule

$$\sin i = n \sin r,$$

on déduit

$$di = n \frac{\cos r}{\cos i} dr.$$

Faisant, dans ces formules,

$$r = 30^\circ, \quad n = 1,6,$$

il vient

$$di = 2,3 dr.$$

Ainsi, l'angle  $i$ , et par suite la position du prisme sur la plate-forme devra être déterminée à  $0',2$  près. Enfin, la rotation de l'image réfléchie étant double de celle du prisme, le pointé de cette image devra être fait à moins de  $0',4$  ou  $24''$ . Cette précision très grossière sera facilement atteinte malgré la mauvaise qualité de l'image réfléchie, qui est fortement dépointée quand la lunette est disposée pour la mesure de la déviation du rayon réfracté.

## § II. — Erreurs systématiques.

65. La principale cause d'erreur dans les mesures d'indices est due aux dépointements que la courbure des faces du prisme conduit à faire subir à la lunette. Dans la mesure de l'angle réfringent par la méthode que j'ai employée, une autre cause grave d'erreur résulte de la difficulté de régler le collimateur, de façon que la fente soit exactement au

foyer principal de l'objectif. M. Cornu, qui a signalé ces causes d'erreurs, en a donné la théorie et calculé les formules de correction <sup>(1)</sup>. Je vais reprendre cette double étude à un point de vue différent et plus général; je comparerai les formules obtenues par les deux méthodes; enfin, je montrerai quels avantages présentent les miennes.

Dans l'observation des raies de Fraunhofer, l'usage d'une lentille collectrice placée en avant de la fente fait que le pinceau lumineux couvre tout le prisme; de cette façon, son axe passe par les centres des faces. C'est là une condition nécessaire à l'établissement de la théorie; car, si l'axe du pinceau perce les faces du prisme en des points qui varient d'une façon inconnue, l'angle réfringent n'est pas exactement défini et varie d'une observation à l'autre. Il en résulte une grande incertitude sur l'indice malgré la finesse des images et la précision des pointés qui devient illusoire quand on ne fait pas usage de la lentille collectrice. D'ailleurs, pour conserver la finesse des images, il suffit, comme l'indique M. Cornu, de diaphragmer le prisme afin d'éviter l'influence des bords des faces; cette opération doit être faite avec soin pour que les diaphragmes des trois faces se correspondent exactement dans la position symétrique du prisme pour la mesure de la déviation du rayon réfracté. Le prisme ainsi diaphragmé, réglé avec soin par les méthodes de M. Cornu, a été centré sur la plate-forme par le procédé des tourneurs.

Je me suis assuré, en outre, que l'axe du tirage de la lunette coïncide avec son axe optique. Pour cela, j'ai pointé la lunette directement sur le collimateur, puis j'ai fait varier le tirage. J'ai ainsi constaté que le réticule, dans son mouvement, reste au centre de l'image dépointée du collimateur. Cette condition n'est utile à remplir que si l'on ne fait pas les pointés à droite et à gauche avec le même tirage. Elle n'était donc pas nécessaire pour mes observations définitives, où, naturellement, cette précaution a été prise, mais seulement pour celles qui ont servi à vérifier les formules que je vais établir.

---

(1) *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. X; 1880.

### INFLUENCE DU DÉPOINTEMENT DE LA LUNETTE.

66. *Sur l'azimut du rayon réfléchi.* — Soient

ABC le prisme supposé convexe (*fig. 9*);

**I la trace de l'axe de l'instrument et le centre du prisme;**

**Q** le centre de la face AB;

SQ l'axe du pinceau incident supposé parallèle à AI;

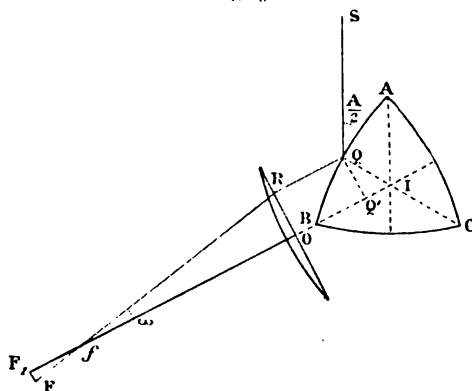
QR l'axe du pinceau réfléchi à gauche;

$fO$  la position de l'axe optique de la lunette supposé parallèle à QR;

$f$  la position du réticule dans le plan focal principal;

O le centre optique de l'objectif.

Fig. 9



Le rayon SQ, réfléchi suivant la droite QR parallèle à l'axe optique  $fO$ , vient passer par le foyer principal  $f$ . Mais le pinceau qui a pour axe QR est divergent en vertu de la convexité des faces du prisme; il vient donc converger, après avoir traversé l'objectif, en un point F de Rf situé au delà de  $f$ . On devra donc commencer par donner à la lunette un dépointement

$$\partial f = + f \mathbf{F}_1.$$

Le réticule étant alors en  $F_1$ , il faudra faire tourner la lunette d'un angle correspondant à  $F_1 F_2$  de façon à amener le réticule de  $F_1$  en  $F_2$ . Ce mouvement aura pour effet de diminuer la lecture du rayon réfléchi

à gauche et, par suite, la mesure de  $\hat{A}$ . On devra donc appliquer à cette lecture (ou à l'angle  $\hat{A}$ ) une correction positive  $\delta A$ . Pour l'évaluer, je mène  $QQ'$  parallèle à  $OR$ , puis je désigne par  $p$  l'apothème  $IQ$  du triangle  $ABC$ , par  $\omega$  l'angle  $\widehat{RfO}$  et par  $f$  la distance focale principale de la lunette. On a successivement

$$OR = QQ' = IQ \sin \widehat{QIQ'} = p \cos \frac{A}{2},$$

$$\omega = \frac{OR}{Of} = \frac{p}{f} \cos \frac{A}{2},$$

$$FF_1 = \omega f F_1 = \frac{p}{f} \cos \frac{A}{2} \delta f,$$

$$\text{Angle correspondant à } FF_1 \text{ ou } \delta A = \frac{FF_1}{OF_1} = \frac{p}{f} \cos \frac{A}{2} \delta f : (f + \delta f):$$

d'où, en définitive, en négligeant  $\delta f$  devant  $f$ ,

$$(1) \quad \delta A = + \frac{p}{f^2} \delta f \cos \frac{A}{2}.$$

Telle est la correction qu'il faut porter à la lecture du rayon réfléchi à gauche ou par ce fait à  $\hat{A}$ , pour un allongement  $\delta f$  de la lunette.

67. *Sur l'azimut du rayon réfracté.* — Soit  $SPQR$  (*fig. 10*) la marche de l'axe du pinceau lumineux réfracté à gauche. Pour avoir la valeur exacte de la déviation  $\Delta$ , je devrais placer l'axe de la lunette suivant  $fO$  parallèle à  $QR$ . Dans cette position,  $QR$  parallèle à l'axe optique se réfracte suivant  $Rf$ , et, comme le pinceau  $QR$  est rendu convergent par la convexité du prisme, son foyer est sur  $Rf$  en deçà de  $f$ , quelque part en  $F$ . On est donc conduit à raccourcir d'abord la lunette en amenant le réticule de  $f$  en  $F_1$ . Je désigne ce dépointement par

$$\delta f = -f F_1.$$

On fera ensuite tourner la lunette de façon à amener le réticule de  $F_1$  en  $F$ . Cette opération a pour effet de diminuer la lecture du rayon réfracté à gauche et, par suite, la déviation  $\Delta$  d'un angle correspon-



dant à  $F_1F$ . Il faut donc porter à cette lecture ou à  $\Delta$  une correction positive  $\delta\Delta$  dont voici le calcul :

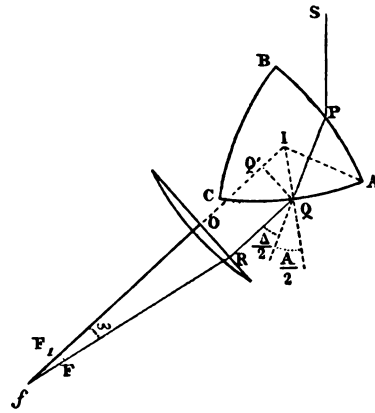
$$OR = QQ' = IQ \sin QIQ' = p \sin \frac{A + \Delta}{2},$$

$$\omega = \frac{OR}{Of} = \frac{p}{f} \sin \frac{A + \Delta}{2},$$

$$FF_1 = \omega \cdot f F_1 = \frac{p}{f} \sin \frac{A + \Delta}{2} (-\delta f) = -\frac{p \delta f}{f} \sin \frac{A + \Delta}{2},$$

$$\text{Angle correspondant à } FF_1 \text{ ou } \delta\Delta = \frac{FF_1}{OF_1} = -\frac{p \delta f}{f} \sin \frac{A + \Delta}{2} : (f + \delta f),$$

Fig. 10.



d'où l'on tire en définitive, en négligeant  $\delta f$  devant  $f$ ,

$$(2) \quad \delta\Delta = -\frac{p}{f^2} \delta f \sin \frac{A + \Delta}{2}.$$

68. Remarquons que, dans les formules (1) et (2), la ligne trigonométrique  $\cos \frac{A}{2}$  ou  $\sin \frac{A + \Delta}{2}$  qui multiplie  $\frac{p}{f^2} \delta f$  représente toujours  $\sin QIQ'$ ; de sorte que, si, dans l'observation du rayon réfléchi, au lieu de considérer un rayon incident parallèle à  $AI$ , comme dans la *fig. 9*, on considère le rayon qui se réfléchit dans la position du minimum de réfraction (*fig. 10*), l'angle  $QIQ'$  est égal à  $\frac{A + \Delta}{2}$ , et la correction qu'il

faut porter à la lecture du rayon réfléchi à gauche devient

$$\delta A = + \frac{p}{f^2} \sin \frac{A + \Delta}{2}.$$

69. Je vais maintenant montrer que les formules (1) et (2) concordent avec celles de M. Cornu.

Correspondante à la formule (1), l'éminent physicien trouve (1)

$$\delta \frac{A}{2} = \frac{p}{\rho} \cot \frac{A}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{x}{f^2} = \frac{2}{\rho \cos i}, \quad i = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2},$$

où  $x$  représente le dépointement  $\delta f$ . On en déduit

$$\delta A = \frac{2p}{\rho} \cot \frac{A}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{2}{\rho} = \frac{\delta f}{f^2} \sin \frac{A}{2};$$

d'où l'on tire

$$\delta A = \frac{p}{f^2} \cos \frac{A}{2},$$

ce qui est la formule (1).

Dans le deuxième cas, M. Cornu fait porter la correction sur l'angle  $A$ , au lieu de la faire porter sur  $\Delta$ , et il trouve (2) les formules

$$\delta' \frac{A}{2} = \frac{p}{\rho} \tan \frac{A + \Delta}{2}, \quad \frac{2}{\rho} = \frac{y \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A + \Delta}{2}}{f^2 \sin \frac{\Delta}{2}},$$

où  $y$  représente  $-\delta f$ .

Je tire de là

$$\delta' A = \frac{2}{\rho} p \tan \frac{A + \Delta}{2} = \frac{py}{f^2} \frac{\sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{\Delta}{2}} \frac{\sin \frac{A + \Delta}{2}}{\cos \frac{A + \Delta}{2}},$$

et en remplaçant  $\frac{py}{f^2} \sin \frac{A + \Delta}{2}$  par  $\delta \Delta$ , d'après ma formule (2),

$$\delta' A = \delta \Delta \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{\Delta}{2}}.$$

(1) *Spectre normal du Soleil*, II<sup>e</sup> Partie, p. 59 et 61.

(2) *Ibid.*, p. 58 et 64.

Si, au lieu de faire porter la correction sur  $A$ , on veut la faire porter sur  $\Delta$ , comme dans ma formule, on doit différentier la formule qui donne  $n$  en laissant  $n$  constant; il vient

$$\begin{aligned}\sin \frac{A + \Delta}{2} &= n \sin \frac{A}{2}, \\ \cos \frac{A + \Delta}{2} (dA + d\Delta) &= n \cos \frac{A}{2} dA, \\ d\Delta &= \frac{n \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{A + \Delta}{2}}{\cos \frac{A + \Delta}{2}} dA;\end{aligned}$$

remplaçant, dans cette formule,  $dA$  par la valeur  $\delta A$  de M. Cornu, on aura la valeur équivalente de  $d\Delta$ ; je remplace en même temps  $n$  par

$$\frac{\sin \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}}; \text{ il vient}$$

$$\begin{aligned}d\Delta &= \delta\Delta \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{\Delta}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{A + \Delta}{2} \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{A + \Delta}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A + \Delta}{2}} \\ &= \frac{\partial\Delta}{\sin \frac{\Delta}{2}} \left( \sin \frac{A + \Delta}{2} \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{A + \Delta}{2} \sin \frac{A}{2} \right),\end{aligned}$$

ou enfin

$$d\Delta = \partial\Delta.$$

Ainsi la valeur de  $d\Delta$  qu'on déduit de la formule de M. Cornu est égale à la valeur  $\delta\Delta$  donnée par ma formule (2).

70. On le voit, il y a bien concordance entre les formules de M. Cornu et les miennes; mais elles présentent une différence essentielle. Dans mes formules, je fais intervenir, non pas le rayon de cour-

bure  $\rho$  des faces du prisme, mais le dépointement même de la lunette. Si l'on s'abstient, par exemple, d'exécuter le changement de mise au point provoqué par la courbure des faces, les corrections données par mes formules (1) et (2) s'annulent.

Les corrections de M. Cornu supposent, au contraire, qu'on opère exactement la mise au point de la lunette à chaque pointé. Si, dans cette opération qui est toujours un peu indécise, on commet une erreur  $df$ , il en résulte, sur les corrections mêmes, des erreurs proportionnelles à  $df$ , et que font connaître mes formules.

Un autre avantage est dans la démonstration même que j'ai employée. Celle-ci distingue explicitement l'axe du pinceau lumineux et l'axe optique de la lunette. Elle ne permet donc pas, entre ces éléments, la confusion que la théorie de M. Cornu paraît avoir laissé échapper à M. Macé de Lépinay (<sup>1</sup>). Cet habile observateur pense éliminer l'influence de la courbure des faces sur la mesure de  $\Delta$  par l'usage de la lentille collectrice. « Par là, dit-il, les *axes des faisceaux lumineux* percent les faces du prisme en leurs centres. » Cela est vrai. Les angles réfringents, conclut l'auteur, sont formés par les plans tangents au prisme en ces points. Là est la confusion. La conclusion est vraie à proprement parler; elle est vraie dans ma théorie, mais il n'en faut pas moins appliquer la correction de dépointement de ma formule (2). Elle doit être regardée comme fausse dans la théorie de M. Cornu.

Ici en effet, par un élégant artifice de démonstration, on regarde comme angle réfringent l'angle des plans tangents au prisme aux points où celui-ci est percé, non par les *axes des faisceaux lumineux*, mais par les *axes optiques des lunettes*. Ma méthode de démonstration ne permet pas le doute à cet égard. Heureusement, la courbure des faces du prisme était très faible dans les recherches en question (les résultats de la mesure des angles en sont la preuve), de sorte qu'il n'en est pas résulté d'erreur sensible sur les indices. Ceux-ci demeurent très bons (<sup>2</sup>).

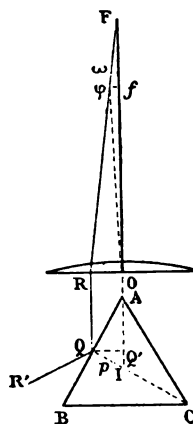
(<sup>1</sup>) *Journal de Physique*, p. 191, avril 1887.

(<sup>2</sup>) D'après l'auteur, l'erreur commise sur  $\Delta$  est 6", sur  $\frac{\Delta}{2}$  elle est 3", on en déduit, par

## INFLUENCE D'UN DÉFAUT DE MISE AU POINT DU COLLIMATEUR.

71. *Sur la mesure de l'angle réfringent.* — Soient O (*fig. 11*) le centre optique de l'objectif et F la fente du collimateur. FO coupe en *f*

Fig. 11.



le plan focal principal, de sorte que le collimateur a subi sur sa position normale le dépointement

$$\delta f = + f F.$$

la formule de M. Cornu,

$$\delta \frac{A}{2} = \frac{P}{\rho} \tan \frac{A}{2}.$$

$$\frac{P}{\rho} = 0,000\,008.$$

La correction qu'il faut appliquer à l'angle réfringent, dans la mesure de l'indice, est donnée par la seconde formule de M. Cornu

$$\delta' \frac{A}{2} = \frac{P}{\rho} \tan \frac{A + \Delta}{2}.$$

Pour  $\frac{A + \Delta}{2} = 50^\circ$ , elle donne

$$\delta' \frac{A}{2} = 0,000\,01 = 2'' = 0',03.$$

Il en résulte sur l'indice l'erreur, à peu près négligeable,

$$0,000\,01.$$

Soit FRQR' la marche de l'axe du pinceau réfléchi à gauche. FR coupe le plan focal principal en  $\varphi$ . Dès lors, RQ est parallèle à  $O\varphi$  au lieu de l'être à  $Of$ . La lecture du rayon réfléchi et, par suite, la valeur de A doit donc subir la correction

$$\partial A = -f \partial \varphi.$$

Je calcule cet angle; j'ai successivement, en désignant par  $\omega$  l'angle OFR et confondant OR avec QQ' qui n'en diffère que d'une quantité de l'ordre de  $\partial f$ ,

$$OR = QQ' = IQ \sin QIQ' = p \cos \frac{A}{2}, \quad \omega = \frac{OR}{OF} = \frac{p}{f + \partial f} \cos \frac{A}{2},$$

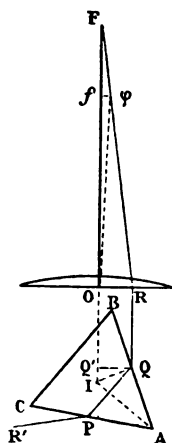
$$f \partial \varphi = \frac{p \partial f}{f} \cos \frac{A}{2}, \quad f \partial \varphi = \frac{f \partial \varphi}{Of} = \frac{p \partial f}{f^2} \cos \frac{A}{2}.$$

Portant cette valeur dans l'expression de  $\partial A$ , j'obtiens enfin

$$(3) \quad \partial A = - \frac{p \partial f}{f^2} \cos \frac{A}{2}.$$

72. *Sur la mesure de la déviation du rayon réfracté.* — Soit FRQPR' (fig. 12) la marche de l'axe du pinceau qui traverse le prisme. FR

Fig. 12.



coupe le plan focal principal du collimateur en  $\varphi$ . Dès lors, QR est parallèle à  $O\varphi$  au lieu de l'être à  $Of$ .

La lecture du rayon réfracté, et par suite la déviation  $\Delta$ , doit donc subir la correction

$$\delta\Delta = -f\hat{O}\varphi.$$

Comme précédemment, cet angle se calcule au moyen de l'angle  $QIQ'$  qui a pour valeur  $\frac{A + \Delta}{2}$ ; on a, en définitive,

$$(4) \quad \delta\Delta = -\frac{p}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \sin \frac{A + \Delta}{2}.$$

Je vais maintenant examiner quelques conséquences des quatre formules que je viens d'établir.

73. Pour simplifier les explications, je supposerai que le collimateur et la lunette ont même distance focale principale; mais cette hypothèse n'est pas nécessaire aux conclusions. J'imagine qu'on ait pu régler exactement les deux instruments sur l'infini. Je passe à la mesure de l'angle  $\hat{A}$ ; je suis conduit à changer la mise au point de la lunette. Si les faces du prisme sont convexes, il faut allonger le tirage. Au lieu d'opérer cet allongement tout entier sur la lunette, je le répartirai également sur la lunette et sur le collimateur. Soit  $\partial f = \partial_1 f$  la valeur commune des deux allongements; je dois ajouter à la lecture du rayon réfléchi, à gauche, les corrections données par mes formules (1) et (3), savoir

$$(1) \quad \partial A = +\frac{p}{f^2} \cos \frac{A}{2},$$

$$(3) \quad \partial_1 A = -\frac{p}{f^2} \cos \frac{A}{2},$$

dont la somme est nulle.

*Ainsi l'erreur qu'entraîne la courbure des faces sur la mesure de  $\hat{A}$  peut être éliminée.*

Au contraire, les formules (2) et (4) donnant des corrections de même signe, ce procédé ne permet pas d'éliminer la même cause d'erreur dans la mesure de  $\Delta$ . Cette erreur est constante quel que soit le système adopté pour les tirages conjugués du collimateur et de la lunette.

74. Je viens de supposer que la fente du collimateur a été primitivement placée au foyer principal de l'objectif. Mais c'est là le point le plus difficile du réglage. Cette difficulté était encore augmentée pour moi par l'absence d'oculaire nadiral. Ce qu'on peut faire avec une grande précision, c'est de régler un des instruments sur l'autre. Si donc le collimateur possède le dépointement  $\delta f$ , la lunette est par là affectée d'un dépointement  $\delta_1 f = -\delta f$ , de sorte que la somme des corrections données par les formules (1) et (3) sera

$$+ \frac{2p \delta f}{f^2} \cos \frac{A}{2}.$$

Au contraire, la somme des corrections données par les formules (2) et (4)

$$(2) \quad \delta \Delta = - \frac{p \delta f}{f^2} \sin \frac{A + \Delta}{2},$$

$$(4) \quad \delta_1 \Delta = - \frac{p \delta_1 f}{f^2} \sin \frac{A + \Delta}{2}$$

est ici nulle.

*Ainsi l'influence d'une erreur sur le réglage du collimateur est doublée dans la mesure de  $\hat{A}$  et compensée dans la mesure de  $\Delta$  par le dépointement conjugué de la lunette.*

75. L'erreur de mise au point du collimateur est la plus grave parce qu'elle est inconnue, tandis que les dépointements causés par la courbure des faces étant connus, on en peut tenir compte par le calcul. J'ai pu l'éliminer grâce aux qualités de mon prisme. Les trois faces sont sensiblement parallèles à une même droite et leurs courbures peu différentes. J'ai pu alors conserver le même tirage pour les pointés sur les trois faces. L'erreur commise sur les trois angles est ainsi la même, et l'excès de la somme des trois sur  $180^\circ$  fait connaître le triple de l'erreur commise sur chacun d'eux. Ce procédé, employé par M. Macé de Lépinay, permet d'éliminer en même temps l'influence du dépointement de la lunette quand on n'établit pas la compensation précédente (n° 73). Cependant les calculs de correction n'étant qu'approchés, et les circonstances n'étant pas rigoureusement les mêmes dans les mesures des trois angles, il est préférable d'éviter les grands écarts et d'effec-



tuer cette compensation, au moins en partie. Comme vérification, j'ai opéré avec divers systèmes de tirages conjugués.

76. D'après ce qui précède (n° 74), l'erreur de réglage du collimateur n'a pas d'influence sur la mesure de  $\Delta$ ; au contraire, l'effet du dépointement dû à la courbure des faces du prisme ne peut pas être compensé comme dans la mesure de l'angle réfringent. Pour la partie moyenne du spectre visible, il suffit d'appliquer la formule de correction (2). L'achromatisme des objectifs rend  $f$  sensiblement constant, de façon que  $\partial f$  est donné par le dépointement que subit la lunette quand on vise l'image de la fente du collimateur directement, puis à travers le prisme. Mais, pour les radiations extrêmes, la valeur de  $f$ , variable avec chaque radiation est mal connue; renonçant alors à mesurer  $\partial f$  et, par suite, à calculer la correction, j'ai songé à faire disparaître l'erreur. Or, d'après ce qui précède (n° 67), elle provient de ce que l'axe du rayon lumineux SPQR (*fig. 10*) ne pénètre pas dans l'objectif de la lunette par son centre optique, mais s'en écarte de OR. Si donc on fait glisser le prisme sur la plate-forme parallèlement à la bissectrice de l'angle  $\hat{A}$  d'une quantité convenable, l'axe PQ du pinceau qui traverse le prisme passera par les centres optiques des objectifs, et les changements de tirage de la lunette et du collimateur seront sans effet sur la lecture du rayon réfracté. Je vais montrer que cette propriété est conservée quand on passe de la déviation à gauche, à la déviation à droite, sans nouveau déplacement du prisme sur la plate-forme.

77. Le principe est celui-ci :

Je considère une figure quelconque  $A, B, C, D_1$  (*fig. 13*), et une droite  $ID_1$  coupant l'axe en I. Si l'on amène la figure dans la position  $A_2 B_2 C_2 D_2$  en la faisant tourner autour de l'axe I de l'angle

$$D_1 I D_2 = 2 D_1 I O;$$

si ensuite on retourne la figure autour de  $ID_2$ , de façon à lui faire occuper la position  $A_3 B_3 C_3$ , cette dernière position est symétrique de la première par rapport à IO. Ce principe, assez intuitif, est démontré par

les égalités suivantes entre les arcs comptés sur la circonférence que décrit le point  $A_1$  :

$$D_1 A_1 = D_2 A_2 = D_3 A_3,$$

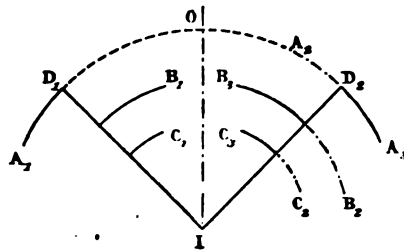
$$OD_1 = \dots = OD_3;$$

d'où l'on déduit, par addition,

$$OA_1 = OA_3.$$

De cette égalité résulte que  $A_1$  et  $A_3$  sont symétriques par rapport à  $IO$ , et il en est de même pour les autres points.

Fig. 13.



Si la figure donnée est symétrique par rapport à  $ID_1$ , le dernier retournement ne fait qu'échanger entre eux les points symétriques; donc la deuxième figure  $A_2 B_2 C_2$  est, dans ce cas, symétrique de la première par rapport à  $IO$ ; seulement les points symétriques des deux figures ne sont pas homologues.

78. Voici l'application de ce principe à la mesure des indices.

Soient

$I$  le centre de la plate-forme (*fig. 14*);

$O, f, O, f_1$  les axes optiques du collimateur et de la lunette;

$A_0 B_0 C_0$  le prisme centré dans la position du minimum de déviation;

$E_0$  le centre de la face  $A_0 C_0$ ;

$E_0 G$  la parallèle à  $O, f_1$  coupant la bissectrice de  $\hat{A}_0$  au point  $G$ .

Je transporte le prisme parallèlement à lui-même de  $A_0 B_0 C_0$  en  $A_1 B_1 C_1$ , de la quantité  $A_0 A_1 = GI$ , de façon que le centre  $E_0$  de la face vienne se placer en  $E_1$  sur l'axe optique  $O, f_1$ .

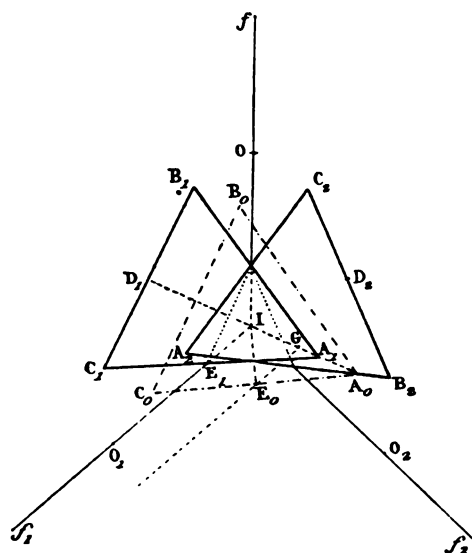
En même temps, l'axe optique du collimateur percera la face  $A_1B_1$  en son centre.

Pour la déviation à droite, j'amène le prisme dans la position  $A_2B_2C_2$ , en faisant tourner la plate-forme de l'angle

$$D_1ID_2 = 2D_1IO = O_1IO = 180^\circ - \Delta.$$

D'après le théorème précédent, la nouvelle position du prisme est symétrique de la première par rapport à  $IO$ . La condition théorique est

Fig. 14.



donc encore réalisée, à savoir que les axes optiques  $Of$  et  $O_2f_2$  du collimateur et de la nouvelle position de la lunette percent les faces du prisme en leurs centres.

79. La longueur  $GI$ , dont il faut faire glisser le prisme et que je désigne par  $e$ , se calcule à l'aide du triangle  $E_0IG$  dans lequel on a

$$GI = IE_0 \frac{\sin \hat{E}_0}{\sin \hat{G}},$$

avec

$$GI = e, \quad \hat{G} = 90^\circ - \frac{\Delta}{2},$$

$$IE_0 = p, \quad \hat{E}_0 = 180^\circ - \hat{I} - \hat{G} = \frac{A + \Delta}{2};$$

on en déduit

$$e = \frac{p \sin \frac{A + \Delta}{2}}{\cos \frac{\Delta}{2}} = p \cdot n \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{\Delta}{2}}.$$

Pour

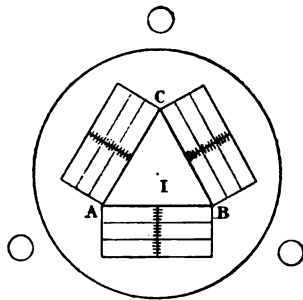
$$p = 1^c, \quad n = 1,66, \quad \frac{\Delta}{2} = 26^\circ, \quad \frac{A}{2} = 30^\circ,$$

on trouve

$$e = 0^c,92.$$

Pour mesurer cette valeur du transport du prisme sur la plate-forme, j'ai fixé à celle-ci un disque gradué en millimètres suivant trois directions à  $60^\circ$ , comme le montre la *fig.* 15.

Fig. 15.



Dans cette figure, ABC représente le prisme supposé centré ou plutôt le support concentrique du prisme. De  $5^{\text{mm}}$  en  $5^{\text{mm}}$  les traits sont prolongés suivant toute la longueur de ce support, pour servir de directrices. On évalue à l'œil le dixième de millimètre. Ce dispositif m'a donné d'excellents résultats.

80. Dans l'observation du rayon extraordinaire à travers les angles B

et C, j'ai dit (n° 63) que je fixe la position du prisme par la distance de l'image réfléchie et de l'image réfractée de la fente du collimateur; les positions de ces images sont affectées des erreurs étudiées (nos 66 et 67). Ces erreurs étant de signes contraires se détruiraient en partie; mais on les annule, la première en faisant porter le dépointement moitié sur la lunette, moitié sur le collimateur, la seconde en déplaçant le prisme comme je viens de l'indiquer.

81. Voici quelques observations destinées à vérifier les formules précédentes et à montrer l'importance des erreurs qu'elles représentent.

*Tirages de la lunette pointée sur l'image de la fente du collimateur,  $\theta = 22^\circ$ .*

|  |                        |
|--|------------------------|
| Directement.....                         | <sup>mm</sup><br>26,86 |
| Par réflexion sur la face $\alpha$ ..... | 18,82                  |
| Dépointement : $\delta f$ .....          | — 8,04                 |

On en conclut que la face  $\alpha$  est concave. Le rayon de courbure se calcule par la formule de M. Cornu (1)

$$\rho = \frac{2f^2}{\delta f \cos i}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f = 44^c, \\ i = 60^\circ, \\ \delta f = -8^{mm}, 04. \end{cases}$$

On obtient

$$\rho = -96^m, 50.$$

La face est relativement très bonne, sa courbure faible; les autres faces sont aussi concaves et ont des courbures peu différentes de la première. Il m'a fallu, pour arriver à ce résultat, rendre plusieurs fois le prisme au constructeur en lui indiquant les modifications à apporter à chaque face.

J'ai fait ensuite varier le tirage de la lunette. Pointant, pour chaque tirage, l'image réfléchie à droite sur la face  $\alpha$  et lisant un seul microscope, j'ai obtenu les résultats suivants :

---

(1) *Spectre normal du Soleil*, II<sup>e</sup> Partie, p. 63.

| Tirages.        | $\delta f$ . | Microscope<br>droit. | $\delta C$ . |       | Différence<br>O. — C. |
|-----------------|--------------|----------------------|--------------|-------|-----------------------|
|                 |              |                      | obs.         | calc. |                       |
| $26^{mm}$ ..... | »            | 300.32.51"           | »"           | »"    | »"                    |
| 24 .....        | — 2          | 32.30                | +21          | +17   | + 4                   |
| 22 .....        | — 4          | 32.18                | 33           | 35    | — 2                   |
| 20 .....        | — 6          | 31.54                | 57           | 52    | + 5                   |
| 18 .....        | — 8          | 31.48                | 63           | 70    | — 7                   |
| 16 .....        | — 10         | 31.24                | 87           | 87    | 0                     |
| 14 .....        | — 12         | 300 31.15            | 96           | 96    | 0                     |

Dans ce Tableau, toutes les différences sont rapportées à la première observation ; la colonne  $\delta f$  donne les dépointements ;  $\delta C$  obs. représente ce qu'il faut ajouter à chaque observation pour reproduire la première ;  $\delta C$  calc. est la correction calculée par la formule

$$\delta \hat{C} = - \frac{p \delta f}{f^2} \cos \frac{A}{2} \quad (1),$$

où l'on fait

$$p = 0,95, \quad f = 44, \quad \frac{C}{2} = 30^\circ.$$

La vérification est, on le voit, très bonne et indique que l'axe du tirage de la lunette coïncide très exactement avec son axe optique. Le Tableau montre que, pour le tirage qui correspond à la mise au point exact (environ  $18^{mm}$ ), l'erreur commise sur  $\hat{C}$  par le fait du dépointement est environ 1'. Pour  $n = 1,66$ , cette erreur entraîne sur  $n$  l'erreur énorme 0,00025. Avec une courbure double de la face, ce qui n'est pas exagéré dans le cas du spath, il en résulterait une erreur égale à 0,0005. Si l'on observe avec deux prismes de courbures inverses, l'écart des deux observations sera doublé. Les erreurs sur la mesure de  $\Delta$  sont de même ordre. On voit combien la précision des pointés et des lectures du cercle peut devenir illusoire. On ne doit donc pas s'étonner des grands écarts que présentent les déterminations des différents physiciens pour le corps qui nous occupe, et il convient de les attribuer bien plutôt aux causes signalées qu'à la variété des

---

(1) Le changement de signe de cette correction vient de ce que l'image est réfléchie à droite et non à gauche comme dans la formule (1) (n° 66).

échantillons employés pour la matière transparente du prisme. C'est là d'ailleurs un point qui a été très bien mis en lumière par M. Cornu dans son Mémoire souvent cité sur le spectre normal du Soleil.

## CORRECTIONS DE TEMPÉRATURE.

82. D'après M. Fizeau (<sup>1</sup>),  $\theta$  étant la température exprimée en degrés,  $n_o$  et  $n_e$ , les deux indices principaux du spath, on a, pour la raie D,

$$\frac{dn_o}{d\theta} = 0,000000565,$$

$$\frac{dn_e}{d\theta} = 0,0000108.$$

Dans mes expériences, l'écart de température n'a jamais dépassé  $10^\circ$ ; j'ai donc pu négliger la variation de  $n_o$ . Celle de  $n_e$  est notable; je ramènerai toutes les observations à la température de  $22^\circ$ , qui est celle du plus grand nombre de mes expériences.

L'influence de la température est surtout très grande sur la variation des angles réfringents. M. Fizeau (<sup>2</sup>) donne en effet pour coefficients de dilatation du spath,

Dans la direction de l'axe optique .....  $\alpha = + 0,000026796$   
 Dans la direction perpendiculaire à l'axe optique .....  $\alpha' = - 0,000005327$

On en déduit facilement

$$\frac{d\frac{A}{2}}{d\theta} = - 0',048, \quad \frac{d\frac{B}{2}}{d\theta} = \frac{d\frac{C}{2}}{d\theta} = + 0',024.$$

Ces valeurs coïncident avec celles que j'ai obtenues par l'observation directe des angles, comme on verra plus loin (n° 83).

Pour  $\delta\theta = + 10^\circ$ , on aurait  $\delta\frac{A}{2} = - 0',48$ . Sur l'indice 1,66, cette variation  $\delta\frac{A}{2}$  entraîne la correction considérable

$$\delta n = + 0,000245.$$

(<sup>1</sup>) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LXVI, p. 460.

(<sup>2</sup>) *Ibid.*, p. 467, 468 et 471.

## § III. — Résultats des mesures dans le spectre visible.

83. *Angles du prisme.* — Voici le Tableau des valeurs brutes obtenues pour la mesure de chaque angle, avec l'indication de la température  $\theta$  et du tirage  $\tau$  de la lunette :

| N <sup>o</sup> . | $\theta$ . | 2 A.      | 2 B.      | 2 C.      | Dates.      | $\tau$ .         |
|------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-------------|------------------|
| 1.....           | 20,5       | 120,15,62 | 119,32,78 | 120,15,55 | 4 août 1888 | 23 <sup>mm</sup> |
| 2.....           | 27         | 14,60     | 33,57     | 16,75     | 14 "        | 21               |
| 3.....           | 27         | 14,55     | 33,23     | 16,65     | " "         | "                |
| 4.....           | 27         | 14,67     | 33,42     | 16,85     | " "         | "                |
| 5.....           | 22         | 15,73     | 33,32     | 15,95     | 16 "        | "                |
| 6.....           | 22         | 15,80     | 33,13     | 16,02     | " "         | "                |
| 7.....           | 20         | 16,05     | 32,87     | 15,85     | 21 "        | "                |
| *8.....          | 22         | 13,60     | 30,98     | 13,82     | 23 "        | 25               |
| *9.....          | 12         | 16,05     | 30,22     | 13,32     | 7 déc. 1888 | "                |
| *10.....         | 12         | 120,15,48 | 119,30,32 | 120,12,75 | " "         | "                |

\* Les observations 8, 9, 10 marquées d'un astérisque sont les seules où le dépointement ait été réparti sur la lunette et le collimateur.

L'observation 8, faite à 22°, comparée à la moyenne des observations 9 et 10, faites à 12°, donne pour les coefficients de dilatation des angles les valeurs précédemment déduites des données de M. Fizeau (n° 82). Ces observations, corrigées des erreurs de dépointement de la lunette (n° 75) et ramenées à 22° (n° 82), deviennent

| N <sup>o</sup> . | 2 A.       | 2 B.       | 2 C.       |
|------------------|------------|------------|------------|
| 1.....           | 120,14,01  | 119,31,60  | 120,14,37  |
| 2.....           | 13,92      | 31,45      | 14,63      |
| 3.....           | 14,03      | 31,27      | 14,69      |
| 4.....           | 13,98      | 31,29      | 14,72      |
| 5.....           | 14,06      | 31,65      | 14,28      |
| 6.....           | 14,15      | 31,48      | 14,37      |
| 7.....           | 14,08      | 31,47      | 14,45      |
| 8.....           | 14,13      | 31,51      | 14,35      |
| 9.....           | 16,19      | 30,36      | 13,46      |
| 10.....          | 15,96      | 30,80      | 13,23      |
| Moyennes.....    | 120,14,125 | 119,31,528 | 120,14,342 |



J'ai exclu des moyennes les quatre premières déterminations : ce sont les premières que j'aie faites, elles sont un peu défectueuses ; la température, particulièrement, n'a pas été observée à chaque pointé, mais seulement au commencement et à la fin de la séance, ce qui est très insuffisant. On remarquera la concordance des moyennes avec les nombres de la série 8, à laquelle j'ai porté un soin tout particulier. A titre de vérification, j'ai mesuré en même temps, dans cette série, les déviations du rayon ordinaire à travers les trois angles, pour la flamme du sodium. J'ai obtenu, avec les valeurs trouvées pour les angles,

|                  |                 |
|------------------|-----------------|
| A travers A..... | 1,658398        |
| » B.....         | 398             |
| » C.....         | 390             |
| Moyenne.....     | <u>1,658395</u> |

La concordance de ces trois nombres est un contrôle précieux de la mesure des angles réfringents. Le même accord se soutient d'une façon très suffisante dans toutes les mesures des indices ordinaires, comme on va voir. D'après cela, nous avons adopté, pour les moitiés des angles réfringents, les formules définitives qui ont servi au calcul des indices

$$\frac{A}{2} = 30^{\circ} 3', 54 - 0', 048 (\theta - 22),$$

$$\frac{B}{2} = 29^{\circ} 52', 88 + 0', 024 (\theta - 22),$$

$$\frac{C}{2} = 30^{\circ} 3', 58 + 0', 024 (\theta - 22).$$

## MESURES D'INDICES.

84. Toutes les mesures sont réunies dans les cinq Tableaux suivants, donnant le numéro de l'observation, la date, le tirage  $\tau$  de la lunette, la température  $\theta$ , l'indication de l'angle réfringent  $\alpha$ , le double de la déviation  $2\Delta$ , la raie spectrale observée, enfin la valeur conclue pour l'indice  $n$ .

## I.

| Numéro. | Date.       | $\tau$ .            | $\theta$ . | $\Delta$ . | $2\Delta$ . | Raie.          | $n$ .   |
|---------|-------------|---------------------|------------|------------|-------------|----------------|---------|
| 1.....  | 6 août 1888 | <sup>mm</sup> 26,85 | 20,9       | A          | 104.26,60   | D <sub>o</sub> | 1,65840 |
| 2.....  | "           | 34                  | 21,0       | A          | 28,33       | D <sub>o</sub> | 1,65838 |
| 3.....  | "           | 26,85               | 20,4       | A          | 72.15,15    | D <sub>e</sub> | 1,48646 |
| 4.....  | "           | 31,3                | 20,2       | A          | 16,18       | D <sub>e</sub> | 1,48645 |
| 5.....  | 7 "         | 26,85               | 20,2       | B          | 103.18,58   | D <sub>o</sub> | 1,65833 |
| 6.....  | "           | 39                  | 20,0       | B          | 22,23       | D <sub>o</sub> | 1,65835 |
| 7.....  | "           | 26,85               | 21,2       | B          | 93.44,88    | D <sub>e</sub> | 1,60969 |
| 8.....  | "           | 38                  | 21,3       | B          | 48,30       | D <sub>e</sub> | 1,60973 |
| 9.....  | 9 "         | 26,85               | 22,6       | C          | 104.26,16   | D <sub>o</sub> | 1,65837 |
| 10..... | "           | 35                  | 22,6       | C          | 29,08       | D <sub>o</sub> | 1,65842 |
| 11..... | "           | 26,85               | 23,7       | C          | 94.46,40    | D <sub>e</sub> | 1,61002 |
| 12..... | "           | 35                  | 23,7       | C          | 49,32       | D <sub>e</sub> | 1,60999 |

## II.

|        |              |    |      |   |           |                |         |
|--------|--------------|----|------|---|-----------|----------------|---------|
| 1..... | 21 août 1888 | 37 | 20,1 | A | 104.29,35 | D <sub>o</sub> | 1,65837 |
| 2..... | "            | 37 | 20,1 | B | 103.21,97 | D <sub>o</sub> | 39      |
| 3..... | "            | 37 | 20,1 | C | 104.29,15 | D <sub>o</sub> | 41      |
| 4..... | 23 "         | 37 | 22,0 | A | 104.29,10 | D <sub>o</sub> | 398     |
| 5..... | "            | 37 | 22,0 | B | 103.22,35 | D <sub>o</sub> | 398     |
| 6..... | "            | 37 | 22,0 | C | 104.29,28 | D <sub>o</sub> | 390     |
| 7..... | "            | 37 | 22,2 | A | 104.26,12 | D <sub>o</sub> | 40      |
| 8..... | "            | 27 | 22,2 | A | 104.26,10 | D <sub>o</sub> | 1,65840 |

## III.

|         |              |       |      |   |           |                |          |
|---------|--------------|-------|------|---|-----------|----------------|----------|
| 1.....  | 13 nov. 1888 | 30,24 | 15,5 | A | 104.28,43 | D <sub>o</sub> | 1,65841  |
| 2.....  | "            | 33,21 | 16,5 | B | 103.18,97 | D <sub>o</sub> | 42       |
| 3.....  | "            | 31,23 | 17,7 | C | 104.25,72 | D <sub>o</sub> | 39       |
| 4.....  | "            | 30,24 | 15,1 | A | 104.28,37 | D <sub>o</sub> | 40       |
| 5.....  | "            | 33,21 | 16,5 | B | 103.18,62 | D <sub>o</sub> | 39       |
| 6.....  | "            | 31,23 | 17,2 | C | 104.25,50 | D <sub>o</sub> | 38       |
| 7.....  | "            | 30,24 | 16,2 | A | 72.15,97  | D <sub>e</sub> | 1,486470 |
| 8.....  | "            | 33,21 | 17,2 | B | 93.45,05  | D <sub>e</sub> | 1,609778 |
| 9.....  | "            | 31,23 | 17,0 | C | 94.45,90  | D <sub>e</sub> | 1,610056 |
| 10..... | "            | 30,24 | 17,5 | A | 72.15,85  | D <sub>e</sub> | 1,486477 |
| 11..... | "            | 33,21 | 17,0 | B | 93.44,82  | D <sub>e</sub> | 1,609763 |
| 12..... | "            | 31,23 | 17,5 | C | 94.45,58  | D <sub>e</sub> | 1,610030 |

## IV.

| Numéro. | Date.       | $\tau$ .         | $\theta$ . | $\lambda$ . | $2\Delta$ . | Raie.          | $n$ .    |
|---------|-------------|------------------|------------|-------------|-------------|----------------|----------|
| 1.....  | 8 août 1888 | 39 <sup>mm</sup> | 21,9       | B           | 102.16,48   | B <sub>o</sub> | 1,65292  |
| 2.....  | "           | 39               | 21,9       | B           | 92.56,75    | B <sub>e</sub> | 1,605214 |
| 3.....  | "           | 39               | 20,5       | B           | 105.18,58   | F <sub>o</sub> | 1,66787  |
| 4.....  | "           | 39               | 20,9       | B           | 95.19,40    | F <sub>e</sub> | 1,617640 |
| 5.....  | "           | 39               | 21,5       | B           | 106.56,80   | G <sub>o</sub> | 1,67579  |
| 6.....  | "           | 39               | 21,4       | B           | 96.35,70    | G <sub>e</sub> | 1,624206 |
| 7.....  | 11 "        | 35               | 26,1       | C           | 103.22,40   | B <sub>o</sub> | 1,65296  |
| 8.....  | "           | 35               | 25,5       | C           | 93.56,75    | B <sub>e</sub> | 1,605547 |
| 9.....  | "           | 35               | 26,1       | C           | 106.26,92   | F <sub>o</sub> | 1,66783  |
| 10..... | "           | 35               | 25,5       | C           | 96.22,15    | F <sub>e</sub> | 1,618000 |
| 11..... | "           | 35               | 26,1       | C           | 108. 7,78   | G <sub>o</sub> | 1,67583  |
| 12..... | "           | 35               | 25,5       | C           | 97.40,05    | G <sub>e</sub> | 1,624595 |
| 13..... | 13 "        | 34               | 25,1       | A           | 103.19,83   | B <sub>o</sub> | 1,65292  |
| 14..... | "           | 31               | 25,3       | A           | 71.50,96    | B <sub>e</sub> | 1,484100 |
| 15..... | "           | 34               | 25,0       | A           | 106.25,45   | F <sub>o</sub> | 1,66788  |
| 16..... | "           | 31               | 25,5       | A           | 73. 1,63    | F <sub>e</sub> | 1,490947 |
| 17..... | "           | 34               | 25,0       | A           | 108. 5,38   | G <sub>o</sub> | 1,67582  |
| 18..... | "           | 31               | 25,5       | A           | 73.39,30    | G <sub>e</sub> | 1,494576 |

## V.

|         |              |    |      |   |           |                |          |
|---------|--------------|----|------|---|-----------|----------------|----------|
| 1.....  | 24 août 1888 | 32 | 20,5 | A | 102.43,97 | A <sub>o</sub> | 1,650054 |
| 2.....  | "            | 32 | 21,4 | B | 101.38,55 | A <sub>o</sub> | 1,650061 |
| 3.....  | "            | 32 | 21,7 | C | 102.43,82 | A <sub>o</sub> | 1,650057 |
| 4.....  | "            | 32 | 20,5 | A | 71.36,72  | A <sub>e</sub> | 1,482737 |
| 5.....  | "            | 32 | 21,5 | B | 92.26,85  | A <sub>e</sub> | 1,602887 |
| 6.....  | "            | 32 | 22,1 | C | 93.26,40  | A <sub>e</sub> | 1,603153 |
| 7.....  | "            | 34 | 22,4 | A | 109.38,28 | H <sub>o</sub> | 1,683205 |
| 8.....  | "            | 34 | 22,7 | B | 108.26,68 | H <sub>o</sub> | 1,683228 |
| 9.....  | "            | 33 | 21,7 | C | 109.38,68 | H <sub>o</sub> | 1,683209 |
| 10..... | "            | 32 | 22,5 | A | 74.13,12  | H <sub>e</sub> | 1,497880 |
| 11..... | 25 "         | 35 | 22,0 | B | 97.44,65  | H <sub>e</sub> | 1,630369 |
| 12..... | 24 "         | 33 | 22,0 | C | 98.49,95  | H <sub>e</sub> | 1,630700 |

Les séries I, II, III ont été faites avec la lumière du sodium; les séries IV et V, avec le Soleil. Dans les séries III et V et dans les cinq dernières mesures de la série II, on a fait usage du disque gradué. Ces mesures n'ont donc pas à subir la correction de dépointement (n° 76). La série I, faite dans le but de vérifier la formule de cette correction,

offre pour chaque observation deux pointés. Tandis que le second est fait en mettant l'image bien au point, on a pour le premier laissé le réticule au foyer principal de la lunette; la première de ces deux mesures n'a donc pas non plus à subir la correction de dépointement. Pour toutes les autres mesures, il a fallu porter à la demi-déviatiou la correction

$$\partial \frac{\Delta}{2} = - \frac{p \partial f}{2f^2} \sin \frac{A + \Delta}{2},$$

avec

$$p = 0^{\circ}, 95, \quad f = 44^{\circ}, \quad \partial f = \tau - 2^{\circ}, 685.$$

#### § IV. — Observations dans le spectre calorifique.

85. L'étude du spectre infra-rouge dans le spath a été faite au laboratoire d'enseignement de M. Bouty, qui m'a offert la plus bienveillante hospitalité. Je dois aussi mes remerciements à M. Mouton, qui m'a autorisé à employer les appareils dont il s'est lui-même servi dans ses recherches sur la dispersion du flint et du quartz. Je renverrai à ses travaux (1) pour l'étude détaillée de sa méthode. Le principe consiste à prendre comme points de repère les franges du spectre cannelé de MM. Fizeau et Foucault, obtenu par l'interposition d'une lame de quartz entre deux polariseurs. Les lames que j'ai employées sont celles dont s'est servi M. Mouton. En voici la désignation :

| Numéro. | $e$ .                           | Ondes. |
|---------|---------------------------------|--------|
| 1.....  | 125 <sup><math>\mu</math></sup> | 2      |
| 2.....  | 181                             | 3      |
| 3.....  | 247                             | 4      |
| 4.....  | 303,6                           | 5      |
| 5.....  | 616                             | 10     |

Les trois colonnes de ce Tableau donnent respectivement un numéro d'ordre, l'épaisseur  $e$  en microns; enfin la colonne *Ondes* indique en

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 5<sup>e</sup> série, t. XVIII, et *Comptes rendus*, t. LXXXVIII; 1879.

nombres ronds les valeurs de  $\frac{n - n'}{\lambda} e$  pour la lumière blanche

$$\frac{n - n'}{\lambda} = 0,016.$$

Ces lames ont été employées, tantôt isolément, tantôt superposées de façon à obtenir de plus grandes épaisseurs.

J'ajouterai seulement à ces renseignements les modifications auxquelles j'ai été conduit, une description sommaire du dispositif expérimental, enfin les résultats.

86. Une modification essentielle résulte de la nécessité où j'étais de remplacer les deux prismes à 30° de M. Mouton par un prisme unique à 60°. Cette nécessité est double : tout d'abord, pour avoir de l'intensité, il faut de gros prismes ; je devais donc, à cause du prix élevé du spath, utiliser les prismes existants à 60°. De plus, je me proposais de prolonger l'étude du rayon extraordinaire à 30° de l'axe. Avec deux prismes, l'orientation cristallographique du rayon lumineux eût été mal définie, ne pouvant être rigoureusement la même dans les deux prismes. On sait que l'avantage de ceux-ci est de maintenir toujours le rayon lumineux dans la position symétrique qui correspond au minimum de déviation d'un rayon d'indice constant. J'obtiens ce résultat par la même méthode qui m'a servi dans le spectre visible, en utilisant l'image réfléchie sur la face du prisme qui est opposée à l'angle réfringent.

L'appareil de polarisation destiné à produire le spectre cannelé a reçu lui aussi une importante simplification : il se compose, comme on sait, d'une lame de quartz comprise entre un polariseur et un analyseur. J'ai remarqué que le prisme, étant biréfringent, peut lui-même remplacer l'analyseur. J'ai donc supprimé cette pièce encombrante qui a l'inconvénient de faire perdre une partie de l'intensité calorifique.

87. La disposition expérimentale est suffisamment expliquée par la *fig. 16* et la légende suivante, dont l'ordre suit la marche des rayons lumineux.

1. *Appareil d'éclairage de la fente.*

L, lanterne.

B, lampe Bourbouze.

L, lentille collectrice donnant une image de B en F.

2. *Appareil de polarisation.*

R, rhomboïdre de spath servant de polariseur.

Q, lame de quartz parallèle à l'axe.

L'analyseur est le prisme P lui-même.

3. *Goniomètre.*

Construit par M. Lutz pour M. Mouton, qui d'ailleurs n'a pas eu l'occasion de s'en servir, il contient les pièces suivantes :

F, fente }  
O, objectif } formant collimateur.

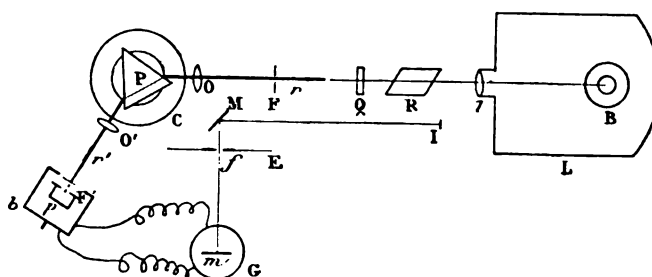
P, prisme placé sur la plate-forme centrale.

O', objectif }  
F', fente } formant lunette.

 $r, r'$ , règles portant le collimateur et la lunette.C, cercle gradué mesurant les rotations de  $r'$ .

Les graduations du cercle représentent les  $10'$ ; deux verniers sont entraînés par la

Fig. 16.



rotation de  $r'$ ; ils sont au vingtième, de sorte que leur lecture donne la demi-minute. La graduation étant très bonne, j'ai eu avantage à lire un seul vernier. Les objectifs, achromatisés pour la lumière blanche, sont en crown et flint. Leur distance focale est  $0^m.29$ .

4. *Appareil thermo-électrique.*

p, pile fixée derrière la fente F'.

b, boîte surmontant la pile et munie d'une glace sans tain sur la face antérieure.

G, galvanomètre fermant le circuit de la pile.

m, miroir concave fixé au fil de suspension de l'aiguille.

3. *Lecture des déviations du galvanomètre.*

I, bec de gaz.

M, miroir fixe.

*f*, fenêtre munie d'un fil vertical.*m*, miroir concave tournant avec l'aiguille du galvanomètre.

E, échelle transparente divisée en millimètres.

La lumière de I se réfléchit sur M, éclaire la fente *f* en la traversant, se réfléchit sur le miroir *m* qui donne une image de *f* sur l'échelle E. Cette image, observée par transparence, mesure par son déplacement la rotation du miroir *m* et, par suite, la déviation de l'aiguille du galvanomètre.

## PRISMES.

88. Les observations effectuées sont de deux sortes. Les premières ont pour but de déterminer de bonnes formules de dispersion pour les indices principaux du spath d'Islande. Elles ont été faites avec un prisme de M. Lutz, qui appartient au laboratoire. Très limpide, il offre une belle dimension et une taille très parfaite. Ses arêtes sont parallèles à l'axe, ce qui assure la constance des angles réfringents. Ceux-ci, mesurés à l'École Polytechnique, au grand goniomètre de Brunner, ont donné

$$\frac{A}{2} = 30^{\circ} 0', 05,$$

$$\frac{B}{2} = 29^{\circ} 59', 85,$$

$$\frac{C}{2} = 30^{\circ} 0', 10.$$

J'ai utilisé seulement l'angle A.

La deuxième partie des observations avait pour but de prolonger les études faites à l'École Polytechnique, avec le prisme de M. Pellin, sur le rayon extraordinaire à  $30^{\circ}$  de l'axe et sur la constance du rayon ordinaire. Ce prisme, de dimensions plus petites et dont les angles varient avec la température, rend les observations plus difficiles. J'ai observé seulement à travers l'angle B, à cause de la facilité que présente cet angle pour mettre le prisme dans la position symétrique par rapport à la marche des rayons lumineux en faisant coïncider l'image réfractée de la fente F avec son image réfléchi par la face opposée à l'angle

réfringent. On a en effet obtenu, pour l'observation dans cet angle, la formule (nos 63 et 83)

$$\text{réflex.} - \text{réfract.} = \hat{C} - \hat{A} = 0',08 \quad (\text{à } 22^\circ).$$

Cette valeur, négligeable dans le cas actuel des observations à la pile thermo-électrique, doit être encore diminuée, parce que ces observations ont été faites à une température inférieure à  $22^\circ$ , environ  $15^\circ$ .

#### RÉSULTATS DES MESURES D'INDICES DANS LE SPECTRE CALORIFIQUE.

89. Ces résultats sont résumés dans les Tableaux suivants, dont les diverses colonnes offrent un numéro d'ordre, la date, les renseignements relatifs aux lames de quartz employées, la longueur d'onde  $\lambda$  et l'indice obtenu  $n$ .

Avec le prisme de M. Lutz :

$$\frac{\hat{A}}{2} = 30^\circ 0',0.$$

#### VI. — Rayon extraordinaire.

| N <sup>o</sup> . | Dates.           | Lames.           |        |                                    | $\lambda$ .                      | $n_e$ . |
|------------------|------------------|------------------|--------|------------------------------------|----------------------------------|---------|
|                  |                  | N <sup>o</sup> . | Ondes. | $e$ .                              |                                  |         |
| *1.....          | 3 et 4 août 1888 | 4                | 5      | 303, <sup><math>\mu</math></sup> 6 | <sup><math>\mu</math></sup> 1,08 | 1,48019 |
| 2.....           | 4 et 6 déc. 1888 | 4                | 5      | 303,6                              | 1,08                             | 1,47988 |
| 3.....           | 30 juillet 1888  | 3                | 4      | 247                                | 1,45                             | 1,47789 |
| 4.....           | 1 et 2 août 1888 | 4                | 5      | 303,6                              | 1,77                             | 1,47661 |
| *5.....          | 9 juillet 1888   | 1                | 2      | 125                                | 2,15                             | 1,47456 |
| 6.....           | 2 février 1889   | 1                | 2      | 125                                | 2,15                             | 1,47534 |

#### VII. — Rayon ordinaire.

| N <sup>o</sup> . | Dates.                    | Lames.           |        |                                    | $\lambda$ .                      | $n_o$ . |
|------------------|---------------------------|------------------|--------|------------------------------------|----------------------------------|---------|
|                  |                           | N <sup>o</sup> . | Ondes. | $e$ .                              |                                  |         |
| 1.....           | 20 juillet 1888           | 4                | 5      | 303, <sup><math>\mu</math></sup> 6 | <sup><math>\mu</math></sup> 1,08 | 1,6424  |
| 2.....           | 15 février 1889           | 5                | 10     | 616                                | 1,22                             | 1,6403  |
| 3.....           | 25 juillet 1888           | 3                | 4      | 247                                | 1,45                             | 1,6361  |
| 4.....           | 15 février 1889           | 5                | 10     | 616                                | 1,54                             | 1,6350  |
| *5.....          | 23 juillet 1888           | 4                | 5      | 303,6                              | 1,77                             | 1,6308  |
| 6.....           | 1 <sup>er</sup> mars 1889 | 5 et 2           | 13     | 797                                | 1,98                             | 1,6279  |
| *7.....          | 30 juin 1888              | 5                | 10     | 616                                | 2,14                             | 1,6239  |



Avec le prisme de M. Pellin :

$$\frac{\hat{B}}{2} = 29^{\circ}52',7; \quad \theta = 15^{\circ} \quad (\text{valeur moyenne}).$$

VIII. — *Rayon à 30° de l'axe optique du cristal.*

| N <sup>o</sup> . | Dates.        | Lames.           |        |                                 | $\lambda$ . | $n_o$ .                       |
|------------------|---------------|------------------|--------|---------------------------------|-------------|-------------------------------|
|                  |               | N <sup>o</sup> . | Ondes. | $e$ .                           |             |                               |
| 1....            | 12 avril 1889 | 5                | 10     | 616 <sup><math>\mu</math></sup> | 1,54        | 1,6350 (rayon ordinaire)      |
| 2....            | 5 »           | 5                | 10     | 616                             | 1,54        | 1,5907 (rayon extraordinaire) |
| 3....            | 6 »           | 5 et 2           | 13     | 797                             | 1,98        | 1,5853 (rayon extraordinaire) |

Les observations 1 et 5 du Tableau VI, 5 et 7 du Tableau VII, marquées d'un astérisque, sont défectueuses pour la raison que voici : l'écran qui doit intercepter la marche de la lumière et qui doit être levé à l'instant où l'on veut mesurer l'intensité du rayon réfracté avait été placé contre la glace même de la boîte *b* (*fig.* 16). Dans ces conditions, quand on lève l'écran, la chaleur rayonnée vers la pile et qui détermine le mouvement de l'aiguille du galvanomètre provient non seulement du rayon réfracté, mais aussi de toute la salle, en particulier de l'observateur et de la lanterne. M'étant aperçu de cette cause d'erreur qui influe beaucoup plus sur les régions extrêmes du spectre, je l'ai évitée en plaçant l'écran devant la fente F du collimateur. Pour la raison que je viens de dire, les observations 1 et 5 du Tableau VI sont remplacées par les valeurs 2 et 6. Si je n'ai pas repris les observations 5 et 7 du Tableau VII, c'est parce que les bandes pointées étaient trop larges pour donner une bonne détermination; j'ai préféré leur substituer les observations 2, 4, 6 qui portent sur des bandes plus resserrées. J'abandonnerai donc pour les calculs les résultats 5 et 7, ne les retenant que pour les tracés graphiques.

90. Je dois ajouter que ces déterminations par la pile sont très longues; elles sont, de plus, très énervantes dans les conditions où j'étais placé par la nécessité. La lampe Bourbouze se trouvant, en effet, dans la même salle que le goniomètre gêne l'observateur par son bruit étourdissant et trouble les indications de la pile par la chaleur qu'elle dé-

gage. Il faut attendre un certain état d'équilibre pour que la lecture de la déviation ne soit pas entachée de l'erreur qui provient d'une marche régulière de l'aiguille. Au bout d'un certain temps les indications deviennent de nouveau défectueuses, l'aiguille prenant, en général, une marche inverse de celle de la première période. D'ailleurs, la fatigue de l'observateur devient une nouvelle cause d'erreur. Enfin, dans le temps intermédiaire le plus propice à l'observation, il est bon d'apporter une certaine vitesse moyenne aux observations pour que l'état d'équilibre atteint ne soit pas changé par des irradiations inégales sur la pile. On ne s'étonnera pas que, très ignorant au début de toutes ces difficultés, j'aie modifié plusieurs fois ma manière d'opérer dans le cours de ces longues observations. Il serait fastidieux d'entrer dans ces détails; cela serait aussi peu utile, le mieux étant d'éviter la principale difficulté en plaçant, comme M. Mouton, la lampe dans une autre salle.

#### § V. — Nouvelles réductions; indices conclus.

##### CORRECTIONS DE TEMPÉRATURE.

91. Ces corrections, inutiles pour le rayon ordinaire, sont importantes pour le rayon extraordinaire. Je ramènerai tous les indices à la température  $0 = 22^\circ$ , en faisant usage du coefficient de M. Fizeau

$$(1) \quad \frac{dn_e}{d\theta} = 0,0000108$$

relatif à l'indice minimum. Ce coefficient n'est, il est vrai, déterminé que pour la raie D; mais il est peu variable dans l'étendue du spectre visible; de plus, les écarts de température sont très faibles; il n'y aura donc pas d'erreur sensible à employer le même coefficient pour toutes les radiations.

Pour l'indice du rayon extraordinaire à  $30^\circ$  de l'axe, on a

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 30^\circ + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 30^\circ;$$

d'où, en différentiant par rapport à  $n_e$  et divisant par  $d\theta$ ,

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{n^2}{n_e^2} \sin^2 30^\circ \frac{dn_e}{d\theta}.$$

Je remplace  $\frac{n^3}{n_e^3} \sin^2 30^\circ$  par sa valeur 0,32 relative à la raie D et  $\frac{dn_e}{d\theta}$  par la valeur (1); j'obtiens

$$\frac{dn}{d\theta} = 0,0000035.$$

J'applique ces coefficients aux valeurs de  $n$  dans le spectre visible, le premier pour les observations à travers l'angle  $\hat{A}$ , le second pour les observations à travers les angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ . J'obtiens le Tableau suivant qui s'explique de lui-même :

IX. — *A travers l'angle A.*

| Raie.   | $d\theta$ . | $dn$ .    | $n$ observé. | $n$ conclu<br>pour $\theta = 22^\circ$ . |
|---------|-------------|-----------|--------------|--|
| A.....  | + 1,5       | +0,000016 | 1,482737     | 1,482753                                 |
| B.....  | — 3,3       | — 36      | 1,484100     | 1,484064                                 |
| D.....  | + 5,8       | + 63      | 1,486470     | 1,486533                                 |
| D.....  | + 4,5       | + 49      | 1,486477     | 1,486526                                 |
| F.....  | — 3,5       | — 38      | 1,490947     | 1,490909                                 |
| G'..... | — 3,5       | — 38      | 1,494576     | 1,494538                                 |
| H.....  | — 0,5       | —0,000005 | 1,497880     | 1,497875                                 |

X. — *A travers l'angle B.*

|         |       |           |          |          |
|---------|-------|-----------|----------|----------|
| A.....  | + 0,5 | +0,000002 | 1,602887 | 1,602889 |
| B.....  | + 0,1 | 0         | 1,605214 | 1,605214 |
| D.....  | + 4,8 | + 17      | 1,609778 | 1,609795 |
| D.....  | + 5,0 | + 17      | 1,609763 | 1,609780 |
| F.....  | + 1,1 | + 4       | 1,617640 | 1,617644 |
| G'..... | + 0,6 | + 2       | 1,624206 | 1,624208 |
| H.....  | 0,0   | 0,000000  | 1,630369 | 1,630369 |

XI. — *A travers l'angle C.*

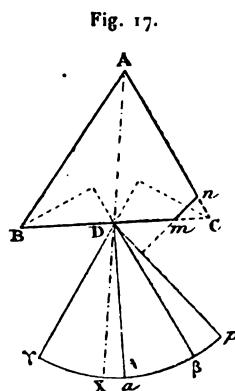
|         |       |          |          |          |
|---------|-------|----------|----------|----------|
| A.....  | — 0,1 | 0,000000 | 1,603153 | 1,603153 |
| B.....  | — 3,5 | — 12     | 1,605547 | 1,605535 |
| D.....  | + 5,0 | + 17     | 1,610056 | 1,610073 |
| D.....  | + 4,5 | + 16     | 1,610030 | 1,610046 |
| F.....  | — 3,5 | — 12     | 1,618000 | 1,617988 |
| G'..... | — 3,5 | — 12     | 1,624595 | 1,624583 |
| H.....  | 0,0   | 0,000000 | 1,630700 | 1,630700 |

CORRECTIONS D'AZIMUT DU RAYON EXTRAORDINAIRE A  $30^\circ$  DE L'AXE.

92. Ces observations demandent une autre correction pour ramener l'indice à la valeur qu'il aurait à  $30^\circ$  de l'axe exactement. Le rayon réfracté, en effet, est dirigé, non pas dans cette direction précise, mais suivant la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle réfringent. Je détermine donc d'abord l'orientation cristallographique des faces du prisme, ce que je fais à l'aide de la facette naturelle laissée comme témoin, le long de l'arête verticale de l'angle C.

Soient

ABC la section droite du prisme (*fig. 17*):



$mn$  la facette naturelle;

ADX l'axe cristallographique;

$Dx$  la normale à la face BC;

$Dp$  la normale à la face  $mn$ .

Je compte les angles sur une circonférence de centre D. J'obtiens

|   |                 |
|---|-----------------|
| Moyenne de trois observations, 9 et 11 mai 1889 ( $\theta = 17^\circ$ environ)... | $pa = 44.27.40$ |
| D'après M. Cornu <sup>(1)</sup> ( $\theta = 17^\circ, 2$ ) . . . . .              | $pX = 44.37.10$ |
|   | $aX = + 9.30$   |

---

<sup>(1)</sup> *Réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque* (*Ann. de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 23).

Dès lors, soient  $D\beta$  et  $D\gamma$  les normales aux bissectrices des angles B et C; on a

$$\begin{array}{rcl} \beta a = \frac{B}{2} = 30^{\circ} - 7,1 & & \alpha \gamma = \frac{C}{2} = 30^{\circ} + 3,6 \\ \alpha X = & + 9,5 & - \alpha X = - 9,5 \\ \beta X = & \frac{30 + 2,4}{30 + 2,4} & X \gamma = \frac{30 - 5,9}{30 - 5,9} \end{array}$$

Tels sont les azimuts des rayons réfractés. La petitesse de l'angle  $\alpha X$  dispense de tenir compte de sa dilatation. Il n'en est pas de même de ces derniers angles  $\beta X$  et  $X\gamma$  dont la dilatation est sensible dans mes observations de la raie D.

Les azimuts  $\omega$  des rayons réfractés dans les angles B et C devront donc être corrigés respectivement de

$$- 2',4 - \frac{d\frac{B}{2}}{d\theta} d\theta \quad \text{et} \quad + 5',9 - \frac{d\frac{C}{2}}{d\theta} d\theta.$$

La correction correspondante sur l'indice se calcule par la formule

$$(1) \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 \omega + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \omega;$$

d'où l'on déduit

$$(2) \quad \frac{dn}{d\omega} = \frac{1}{2} \sin 2\omega \cdot n^3 \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right).$$

Dans cette formule, je remplace  $2\omega$  par  $60^{\circ}$ ; puis  $n$ ,  $n_o$ ,  $n_e$  par les valeurs trouvées pour chaque radiation. J'obtiens les résultats consignés dans le Tableau suivant :

## XII. — A travers $\hat{B}$ .

| Raie.     | $d\omega$ . | $\frac{dn}{d\omega}$ . | $\frac{dn}{d\omega} d\omega$ . | $n$ observé. | $n$ conclu<br>à $30^{\circ}$ de l'axe. |
|-----------|-------------|------------------------|--------------------------------|--------------|--|
| $\mu$     |             |                        |                                |              |  |
| 1,98..... | - 2,4       | - 40,9                 | + 10.                          | 1,58532.     | 1,58542.                               |
| 1,54..... | - 2,4       | - 42,0                 | + 10.                          | 1,59067.     | 1,59077.                               |
| A.....    | - 2,4       | - 45,4                 | + 109                          | 1,602889     | 1,602998                               |
| B.....    | - 2,4       | - 46,4                 | + 111                          | 1,605214     | 1,605325                               |
| D.....    | - 2,3       | - 46,9                 | + 107                          | 1,609795     | 1,609902                               |
| D.....    | - 2,3       | - 46,9                 | + 107                          | 1,609780     | 1,609887                               |
| F.....    | - 2,4       | - 48,1                 | + 115                          | 1,617644     | 1,617759                               |
| G'.....   | - 2,4       | - 49,4                 | + 119                          | 1,624208     | 1,624327                               |
| H.....    | - 2,4       | - 50,7                 | + 121                          | 1,630369     | 1,630490                               |

XIII. — *A* travers  $\hat{C}$ .

| Raie.   | $d\omega$ . | $\frac{dn}{d\omega}$ . | $\frac{dn}{d\omega} d\omega$ . | $n$ observé. | $n$ conclu<br>à 30° de l'axe. |
|---------|-------------|------------------------|--------------------------------|--------------|-------------------------------|
| A.....  | + 5,9       | — 45,4                 | — 268                          | 1,603153     | 1,602885                      |
| B.....  | + 5,9       | — 46,4                 | — 274                          | 1,605535     | 1,605261                      |
| D.....  | + 6,0       | — 46,9                 | — 281                          | 1,610073     | 1,609792                      |
| D.....  | + 6,0       | — 46,9                 | — 281                          | 1,610046     | 1,609765                      |
| F.....  | + 5,9       | — 48,1                 | — 284                          | 1,617988     | 1,617704                      |
| G'..... | + 5,9       | — 49,4                 | — 292                          | 1,624583     | 1,624291                      |
| H.....  | + 5,9       | — 50,7                 | — 299                          | 1,630700     | 1,630401                      |

93. Les valeurs de  $n$  déduites des observations faites dans l'angle  $\hat{C}$  diffèrent notablement de celles qu'on obtient par l'angle  $\hat{B}$ . Ces dernières concordent d'ailleurs beaucoup mieux avec la formule (1) (n° 92), qui représente la loi de Fresnel. J'ai cherché la cause de cet écart dans mes cahiers d'observation, et j'ai trouvé l'erreur systématique que voici :

Dans l'observation à travers l'angle  $\hat{C}$ , au lieu d'employer la formule

$$\text{réfl.} - \text{réfrac.} = A - B,$$

j'ai pris pour cette quantité  $\frac{A-B}{2}$ . La lecture du rayon réfléchi aurait donc dû être augmentée (1) de  $\frac{A-B}{2}$ ; pour cela, il aurait fallu faire tourner le prisme de  $\frac{A-B}{4}$ . Par là, l'angle d'incidence  $i$ , dans la position ABC correspondante au rayon réfracté à gauche, serait augmenté de

$$di = \frac{A-B}{4},$$

et il en résulterait, pour l'angle de réfraction  $r$ , l'accroissement qu'on déduit de la formule

$$\sin i = n \sin r,$$

savoir

$$dr = \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\cos r} di.$$

---

(1) Dans ce raisonnement, je néglige la variation de la lecture du rayon réfracté qui résulte de la rotation du prisme; cette variation est en effet petite relativement à celle du rayon réfléchi.

Faisant dans cette formule

$$n = \frac{\sin \frac{C + \Delta}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, \quad r = \frac{C}{2}, \quad i = \frac{C + \Delta}{2}, \quad di = \frac{A - B}{4},$$

il vient

$$dr = \tan \frac{C}{2} \cot \frac{C + \Delta}{2} \times \frac{A - B}{4}.$$

Le rayon réfracté subirait ainsi, dans l'intérieur du cristal, la rotation

$$d\omega_1 = -dr.$$

L'indice de réfraction doit donc subir la nouvelle correction

$$dn_1 = \frac{dn}{d\omega} d\omega_1.$$

En voici le calcul avec

$$\frac{A - B}{4} = +5',33, \quad \frac{C}{2} = 30^\circ.$$

#### XIV.

| Raie.   | $\frac{C + \Delta}{2}$ | $d\omega_1 = -dr.$ | $\frac{dn}{d\omega}$ | $\frac{dn}{d\omega} d\omega_1.$ | $n$ valeur précédente. | $n$ conclu à 30° de l'axe. |
|---------|------------------------|--------------------|----------------------|---------------------------------|------------------------|----------------------------|
| A.....  | 53,4                   | -2,28              | -45,4                | +104                            | 1,602885               | 1,602989                   |
| B.....  | 53,5                   | -2,28              | -46,4                | +106                            | 1,605261               | 1,605367                   |
| D.....  | 53,7                   | -2,26              | -46,9                | +106                            | 1,609792               | 1,609898                   |
| D.....  | 53,7                   | -2,26              | -46,9                | +106                            | 1,609765               | 1,609871                   |
| F.....  | 54,1                   | -2,23              | -48,1                | +107                            | 1,617704               | 1,617811                   |
| G'..... | 54,5                   | -2,20              | -49,4                | +109                            | 1,624291               | 1,624400                   |
| H.....  | 54,8                   | -2,18              | -50,7                | +110                            | 1,630401               | 1,630511                   |

Les observations à travers l'angle  $\hat{B}$  devraient à la rigueur subir une correction semblable, car j'ai commis la même erreur. Mais la petitesse de l'angle

$$\frac{C - A}{4} = +0',01$$

rend cette correction insignifiante.

Les nombres observés ayant subi toutes les corrections voulues, j'en peux désormais déduire les conclusions que je poursuis.

## § VI. — Conclusions.

### CONSTANCE DE L'INDICE DU RAYON ORDINAIRE DU SPATH.

94. Je reporte ici les résultats trouvés (nos 84 et 89) :

|        | 12,54. | A.       | B (°).   | D (°).   | F (°).   | G' (°).  | II.      |
|--------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| A..... | 1,6350 | 1,650054 | 1,65292  | 1,658398 | 1,66788  | 1,67582  | 1,683205 |
| B..... | 1,6350 | 061      | 92       | 398      | 87       | 79       | 228      |
| C..... | »      | 057      | 96       | 390      | 83       | 83       | 209      |
| Moy..  | 1,6350 | 1,650057 | 1,652933 | 1,658395 | 1,667860 | 1,675813 | 1,683214 |

On le voit, les écarts entre les trois valeurs de chaque indice sont certainement dus aux erreurs d'observation. Dans le spectre visible, la valeur de l'indice trouvée par l'angle A coïncide, à une unité près de l'ordre du cinquième chiffre décimal, soit avec la moyenne des valeurs trouvées par les angles B et C, soit avec l'une de ces valeurs. La conclusion est donc incontestable :

*A l'approximation des expériences, l'indice ordinaire est indépendant de l'azimut du rayon lumineux dans toute l'étendue du spectre calorifique et du spectre visible.*

### FORMULES DE DISPERSION POUR LES TROIS INDICES.

95. *Rayon ordinaire.* — J'ai adopté, pour les indices ordinaires dans le spectre visible, les moyennes précédentes (n° 94). Pour le spectre

(<sup>1</sup>) Les observations des raies B, F, G' proviennent du Tableau IV (n° 84). Elles sont un peu moins précises que celles des raies A, D, II. Pour cette raison, je donne seulement le cinquième chiffre décimal.

(<sup>2</sup>) Parmi toutes les déterminations de la raie D, je reporte seulement les observations 4, 5, 6 du Tableau II (n° 84). Elles ont été faites avec un soin tout particulier, et leur moyenne coïncide avec la moyenne générale de toutes mes déterminations.



calorifique, j'ai pris les valeurs inscrites au Tableau VII (n° 89). A ces nombres, j'ai joint, pour le spectre ultra-violet, les déterminations de M. Cornu <sup>(1)</sup> de la raie O à la raie U, et celles de M. Sarazin <sup>(2)</sup> (premier prisme) de la raie 9 à la raie 26 du cadmium. J'ai ainsi obtenu la formule

$$\frac{1}{n^2} = cl^2 + a + bl^{-2} + dl^{-4},$$

avec les valeurs numériques

$$\begin{aligned} a &= +0,37107, & b &= -0,001011, \\ c &= +0,0047, & d &= -0,0000005. \end{aligned}$$

La comparaison de la formule aux observations que je viens de dire est contenue dans le Tableau suivant XV.

Sectionné suivant les régions du spectre, pour faciliter la lecture, ce Tableau offre, à titre de variantes, les nombres non adoptés, trouvés par d'autres observateurs. On y remarquera les particularités suivantes.

Mes nombres présentent avec ceux de M. Cornu, dans la partie visible, un écart systématique de 7 à 8 unités du cinquième chiffre. Cet écart n'étant pas trop grand, je n'ai pas porté aux observations la correction qui serait nécessaire pour les rendre comparables. De là, la différence sensiblement constante + 3 dans le spectre visible, et la différence — 5 pour la raie O. Celle-ci, retranchée de + 3, donne bien l'écart systématique + 8 entre mes observations et celles de M. Cornu.

Cette réserve faite, la concordance entre l'observation et la formule est meilleure même qu'il n'était permis de l'espérer, surtout si l'on considère les écarts énormes qui existent entre les déterminations des divers physiciens.

<sup>(1)</sup> *Spectre normal du Soleil* (*Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. IX; 1880).

<sup>(2)</sup> *Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. II; 1883.

XV. — *Dispersion du rayon ordinaire.*

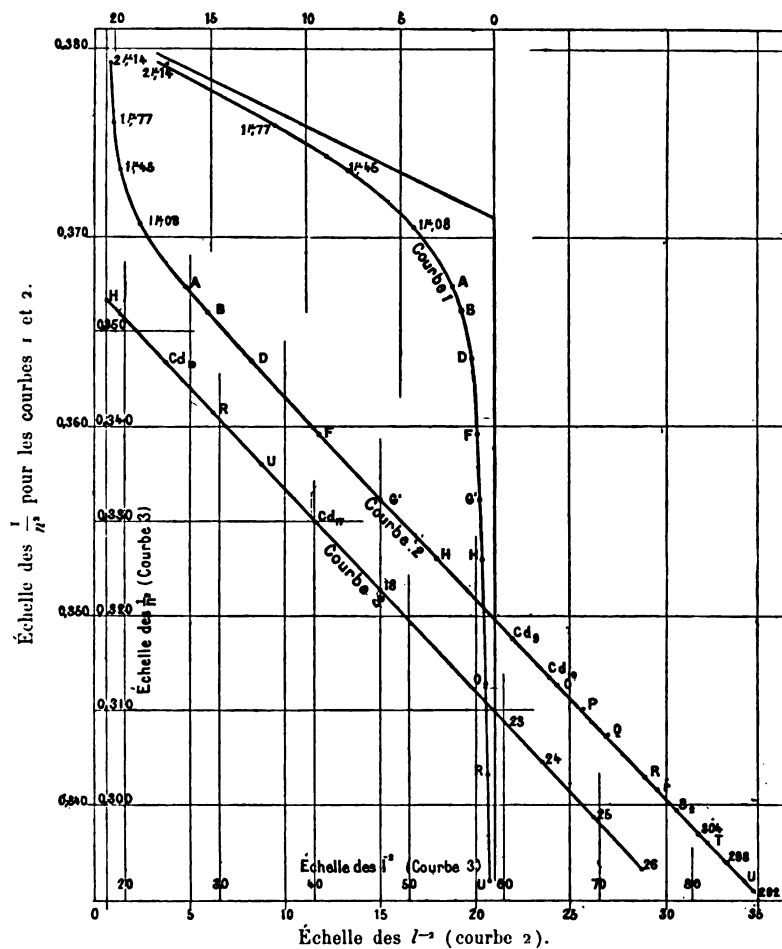
|                    | A.      | Rudberg. | Mascart.    | Sarazin. | Cornu.  | $n$ observé. | $n$ calculé. | Diff.<br>O. — C. |
|--------------------|---------|----------|-------------|----------|---------|--------------|--------------|------------------|
|                    | $\mu$   |          |             |          |         |              |              |                  |
|                    | 1,984   |          |             |          |         | 1,6279.      | 1,6279.      | 0.               |
|                    | 1,54    |          |             |          |         | 1,6350.      | 1,6350.      | 0.               |
|                    | 1,45    |          |             |          |         | 1,6361.      | 1,6363.      | —2.              |
|                    | 1,22    |          |             |          |         | 1,6403.      | 1,6399.      | +4.              |
|                    | 1,08    |          |             |          |         | 1,6424.      | 1,6423.      | +1.              |
| A....              | 0,76040 |          | 1,65012     | 1,65000  |         | 1,65006      | 1,65003      | +03              |
| B....              | 68674   | 1,65308  | 1,65296     | 1,65285  |         | 1,65293      | 1,65293      | 0                |
| D....              | 58920   | 1,65850  | 1,65846     | 1,65839  | 1,65832 | 1,65840      | 1,65837      | +3               |
| F....              | 48607   | 1,66802  | 1,66793     | 1,66783  | 1,66779 | 1,66786      | 1,66783      | +3               |
| G'...              | 43256   |          |             |          |         | 1,67581      | 1,67578      | —3               |
| H....              | 39672   | 1,68330  | 1,68330     | 1,68319  |         | 1,68321      | 1,68318      | —3               |
| g....              | 36090   |          |             |          |         | 1,69325      | 1,69325      | 0                |
| io....             | 34655   |          |             |          |         | 1,69842      | 1,69835      | +7               |
| O....              | 34397   |          | 1,69955     |          |         | 1,69928      | 1,69933      | —5               |
| P....              | 33592   |          | 1,70276     |          |         | 1,70251      | 1,70263      | —12              |
| Q....              | 32850   |          | 1,70613     |          |         | 1,70583      | 1,70593      | —10              |
| R....              | 31790   |          | 1,71155     |          |         | 1,71112      | 1,71116      | —4               |
| r....              | 31442   |          |             |          |         | 1,71303      | 1,71303      | 0                |
| S <sub>2</sub> ... | 30998   |          | 1,71580 (S) |          |         | 1,71550      | 1,71551      | —1               |
| 304...             | 30418   |          |             |          |         | 1,71901      | 1,71897      | +4               |
| T....              | 30198   |          | 1,71939     |          |         | 1,72034      | 1,72037      | +7               |
| 298...             | 29840   |          |             |          |         | 1,72269      | 1,72270      | —1               |
| U....              | 29479   |          |             |          |         | 1,72525      | 1,72519      | —6               |
| 17...              | 27467   |          |             |          |         | 1,74151      | 1,74139      | +12              |
| 18...              | 25713   |          |             |          |         | 1,76050      | 1,76042      | +8               |
| 23...              | 23125   |          |             |          |         | 1,80248      | 1,80223      | +25              |
| 24...              | 22645   |          |             |          |         | 1,81300      | 1,81284      | +16              |
| 25...              | 21935   |          |             |          |         | 1,83090      | 1,83101      | —11              |
| 26...              | 21441   |          |             |          |         | 1,84580      | 1,84598      | —18              |

Voici les courbes obtenues en prenant pour ordonnées  $\frac{1}{n^2}$ , et pour abscisses, soit  $t^2$  (courbe 1), soit  $t^{-2}$  (courbes 2 et 3) (*fig. 18*).

96. *Indice minimum.* — J'ai adopté mes nombres pour les spectres calorifique et visible (n° 89, Tableau VI, et n° 91). Pour le spectre ultra-violet, il était naturel de prendre encore les nombres de M. Sarazin (premier prisme). Seulement, les différences entre les nombres de ce physicien et les miens sont ici un peu fortes, comme on en jugera par le Tableau suivant :

|              | Carvallo. | Sarazin. | Différence. |
|--------------|-----------|----------|-------------|
| A .....      | 1,48275   | 1,48261  | + 14        |
| B .....      | 1,48406   | 1,48391  | + 15        |
| D .....      | 1,48653   | 1,48644  | + 9         |
| F .....      | 1,49091   | 1,49079  | + 12        |
| H .....      | 1,49788   | 1,49774  | + 14        |
| Moyenne..... |           |          | + 13        |

Fig. 18.

 Échelle des  $l^2$ .


J'ai donc ajouté + 13 aux nombres de M. Sarazin. J'ai ainsi obtenu,

pour les coefficients de la formule de dispersion,

$$\begin{aligned} a &= +0,45778, & b &= -0,000840, \\ c &= +0,00098, & d &= -0,00000084. \end{aligned}$$

Dans le Tableau XVI, on trouve la comparaison des nombres observés et des nombres calculés avec les variantes de Rudberg et de MM. Mascart et Sarazin. Les nombres de celui-ci n'ont pas été changés; mais, pour ses observations, on a augmenté de +13 la différence entre  $n$  observé et  $n$  calculé. On y verra que l'accord entre l'observation et la formule est encore très satisfaisant.

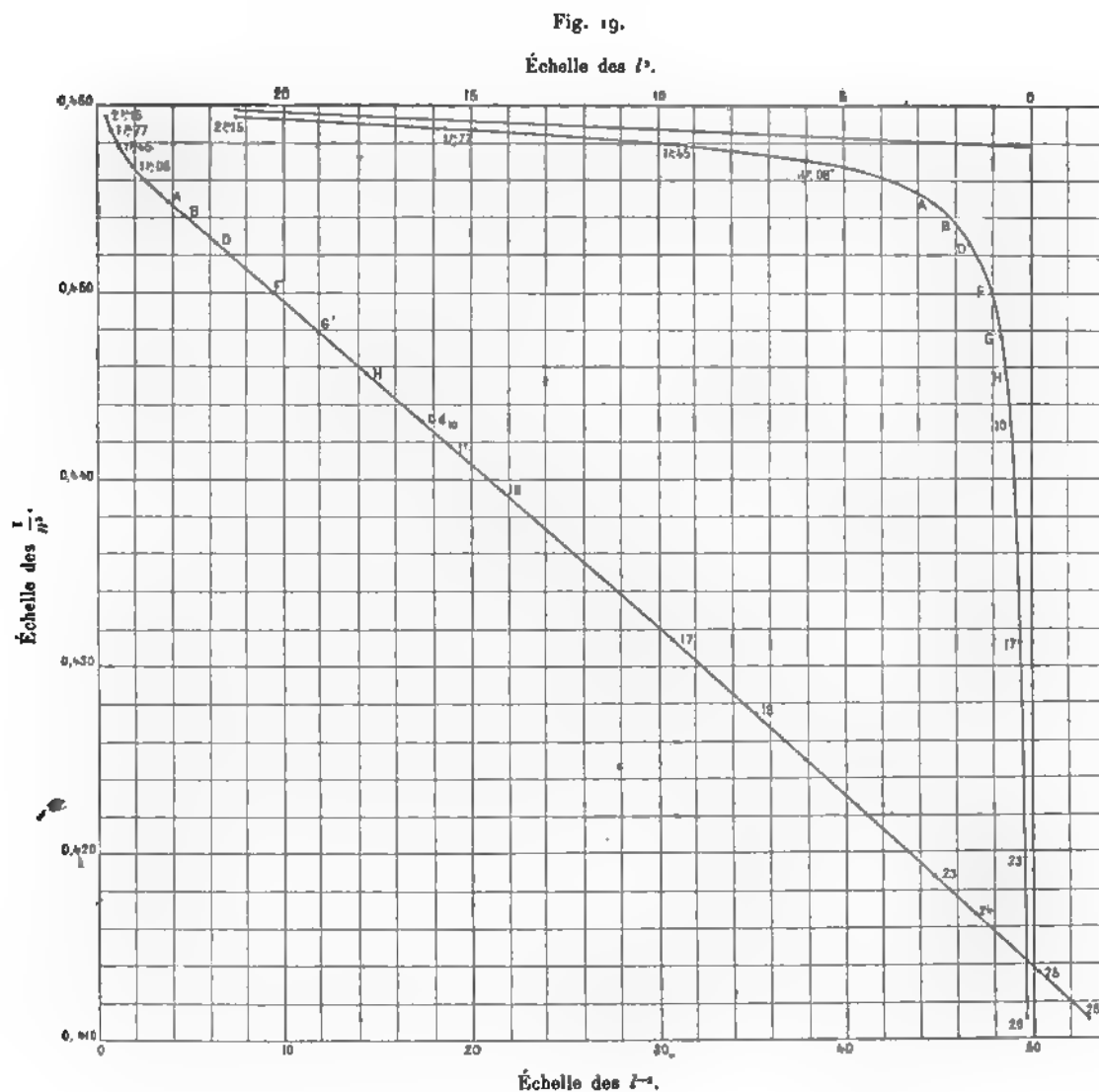
Ainsi, quoique les observations de M. Mascart n'aient pas permis (n° 42) de calculer le terme de dispersion de Briot, ce terme n'est pas négligeable quand on considère les radiations calorifiques. Seulement il est environ cinq fois plus petit que pour le rayon ordinaire, puisque le coefficient  $c$  a pour valeurs

$$\begin{aligned} \text{Pour le rayon ordinaire.....} & c_o = +0,00470, \\ \text{» extraordinaire.....} & c_e = +0,00098. \end{aligned}$$

#### XVI. — Dispersion de l'indice minimum.

|         | $\lambda$ . | Rudberg. | Mascart. | Sarazin. | $n$ observé. | $n$ calculé. | Diff.<br>O. — C. |
|---------|-------------|----------|----------|----------|--------------|--------------|------------------|
|         | $\mu$       |          |          |          |              |              |                  |
|         | 2,15        |          |          |          | 1,4753.      | 1,4753.      | 0.               |
|         | 1,77        |          |          |          | 1,4766.      | 1,4767.      | —1.              |
|         | 1,45        |          |          |          | 1,4779.      | 1,4779.      | 0.               |
|         | 1,08        |          |          |          | 1,4799.      | 1,4797.      | +2.              |
| A.....  | 0,76040     |          | 1,48285  | 1,48261  | 1,48275      | 1,48277      | —02              |
| B.....  | 68674       | 1,48391  | 1,48409  | 1,48391  | 1,48406      | 1,48405      | +1               |
| D.....  | 58920       | 1,48635  | 1,48654  | 1,48644  | 1,48653      | 1,48650      | +3               |
| F.....  | 48607       | 1,49075  | 1,49084  | 1,49079  | 1,49091      | 1,49087      | +4               |
| G'..... | 43256       |          |          |          | 1,49454      | 1,49451      | +3               |
| H.....  | 39672       | 1,49780  | 1,49777  | 1,49774  | 1,49788      | 1,49788      | 0                |
|         |             |          |          |          |              |              | O. — C. + 13.    |
| 9.....  | 36090       |          |          |          | 1,50228      | 1,50240      | +1               |
| 10..... | 34655       |          |          |          | 1,50452      | 1,50465      | 0                |
| 11..... | 34015       |          |          |          | 1,50559      | 1,50576      | —4               |
| 12..... | 32475       |          |          |          | 1,50857      | 1,50874      | —4               |
| 17..... | 27467       |          |          |          | 1,52276      | 1,52283      | +6               |
| 18..... | 25723       |          |          |          | 1,53019      | 1,53033      | —1               |
| 23..... | 23135       |          |          |          | 1,54559      | 1,54562      | +10              |
| 24..... | 22655       |          |          |          | 1,54920      | 1,54923      | +10              |
| 25..... | 21945       |          |          |          | 1,55514      | 1,55520      | +7               |
| 26..... | 21441       |          |          |          | 1,55993      | 1,55997      | +9               |

Voici les courbes de dispersion pour l'indice minimum (fig. 19).



97. *Rayon extraordinaire à 30° de l'axe.* — Tout d'abord, avec la formule

$$(1) \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 30^\circ + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 30^\circ,$$

qui exprime la loi admise pour les vitesses du rayon extraordinaire, je calcule les valeurs de  $n$  qu'on déduit des valeurs observées de  $n_o$  et  $n_e$  (nos 95 et 96). Seulement, les valeurs de  $n_e$  pour  $1^{\mu},98$  et  $1^{\mu},54$  n'ayant pu être observées, je les ai calculées par la formule d'interpolation (n° 96). Puis, je compare les valeurs de  $n$  ainsi calculées aux valeurs observées au moyen des angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  (n° 92, XII, et n° 93, XIV). Ces nombres se trouvent dans les trois premières colonnes du Tableau suivant :

XVII. — *Rayon extraordinaire à 30° de l'axe.*

| $\mu$      | $n$ observé |          | $n$ calculé  |              |
|------------|-------------|----------|--------------|--------------|
|            | angle B.    | angle C. | formule (1). | formule (2). |
| 1,98 ..... | 1,5854      | »        | 1,5855       | 1,5856       |
| 1,54 ..... | 1,5908      | »        | 1,5909       | 1,5909       |
| A.....     | 1,60300     | 1,60299  | 1,60298      | 1,60297      |
| B.....     | 1,60533     | 1,60537  | 1,60537      | 1,60538      |
| D.....     | 1,60990     | 1,60990  | 1,60990      | 1,60990      |
| F.....     | 1,61776     | 1,61781  | 1,61778      | 1,61778      |
| G'.....    | 1,62433     | 1,62440  | 1,62438      | 1,62438      |
| H.....     | 1,63049     | 1,63051  | 1,63051      | 1,63051      |

Par leur comparaison, on voit que la loi représentée par la formule (1) est plus exacte que n'aurait pu le faire prévoir la double réfraction si intense du spath avec des termes de dispersion si différents pour les indices principaux. Il est à penser, que pour le rayon extraordinaire à 30° de l'axe, la même forme convient à la formule de dispersion que pour les indices principaux. Si donc on remplace dans la formule (1)  $\frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{1}{n_o^2}$  et  $\frac{1}{n_e^2}$  par leurs développements dont les deux derniers sont connus et dont le premier est de même forme

$$\frac{1}{n^2} = cl^2 + a + bl^{-2} + dl^{-4},$$

on pourra calculer les coefficients inconnus  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  au moyen des coefficients connus relatifs aux deux indices principaux, en identifiant les deux membres après les avoir développés en séries suivant les puissances de  $\lambda^2$ . A la vérité, j'ai dû modifier très légèrement les ré-

sultats de ce calcul pour rendre la concordance plus parfaite. Ce fait, un peu paradoxal, s'explique en remarquant que les données du calcul sont quelque peu incertaines. J'ai ainsi adopté pour les coefficients de la formule de dispersion

$$(2) \quad \frac{1}{n^2} = cl^2 + a + bl^{-2} + dl^{-4},$$

les valeurs

$$\begin{aligned} a &= +0,392734, & b &= -0,000985, \\ c &= +0,0037, & d &= -0,0000006. \end{aligned}$$

Les nombres déduits de cette formule (2) sont inscrits dans la dernière colonne du Tableau XVII. La comparaison des deux dernières colonnes montre l'identité à peu près complète des formules (1) et (2). La comparaison aux deux premières colonnes montre que ces deux formules représentent bien les observations.

#### CONCLUSIONS THÉORIQUES.

98. *Hypothèses de Fresnel et de Neumann.* — Les diverses valeurs du coefficient  $c$  du terme de Briot obtenues (nos 95, 96, 97) sont :

|  |                    |
|--|--------------------|
| Pour le rayon ordinaire.....                   | $c_o = +0,0047$    |
| » extraordinaire { perpendiculaire à l'axe.... | $c_e = +0,00098$   |
| » à 30° de l'axe.....                          | $c_{30} = +0,0037$ |

Voici les valeurs qui en résultent pour le terme  $cl^2$  du rayon ordinaire :

|           | $c_o l^2$ . | $c_{30} l^2$ . | $c_e l^2$ . |
|-----------|-------------|----------------|-------------|
| $\mu$     |             |                |             |
| 1,98..... | + 0,00698   | + 0,00550      | + 0,00145   |
| 1,54..... | 417         | 328            | 87          |
| A.....    | 100         | 78             | 21          |
| D.....    | 59          | 47             | 12          |
| H.....    | 26          | 20             | 5           |

Dans l'hypothèse de Neumann, le terme  $cl^2$  devrait (n° 43), pour le rayon ordinaire, prendre successivement les valeurs  $c_o l^2$ ,  $c_{30} l^2$ ,  $c_e l^2$  quand l'angle du rayon lumineux avec l'axe est égal à 90°, 30° et 0°. Il en résulterait une variation énorme de l'indice, environ double de

la variation de  $\frac{1}{n^2}$ . Cette variation affecterait donc le deuxième chiffre décimal pour la raie  $\text{H}^{\alpha}$ , le troisième pour la raie A. Mes expériences précédemment exposées et celles de Schwab répondent catégoriquement qu'il n'en est pas ainsi, mais que l'indice du rayon ordinaire est constant, conformément à l'hypothèse de Fresnel (n° 43). Il en est de même d'une série d'expériences que j'ai faites à Rennes, au laboratoire de M. Gripon, et dans lesquelles j'ai observé aussi à  $60^{\circ}$  et à  $0^{\circ}$  de l'axe sur toute l'étendue du spectre visible. Malheureusement je ne connaissais pas alors les beaux travaux de M. Cornu, et mes nombres sont entachés des erreurs dues à la courbure qui était considérable. Ils ne méritent donc pas la publicité; mais ils suffisent pour la démonstration actuelle.

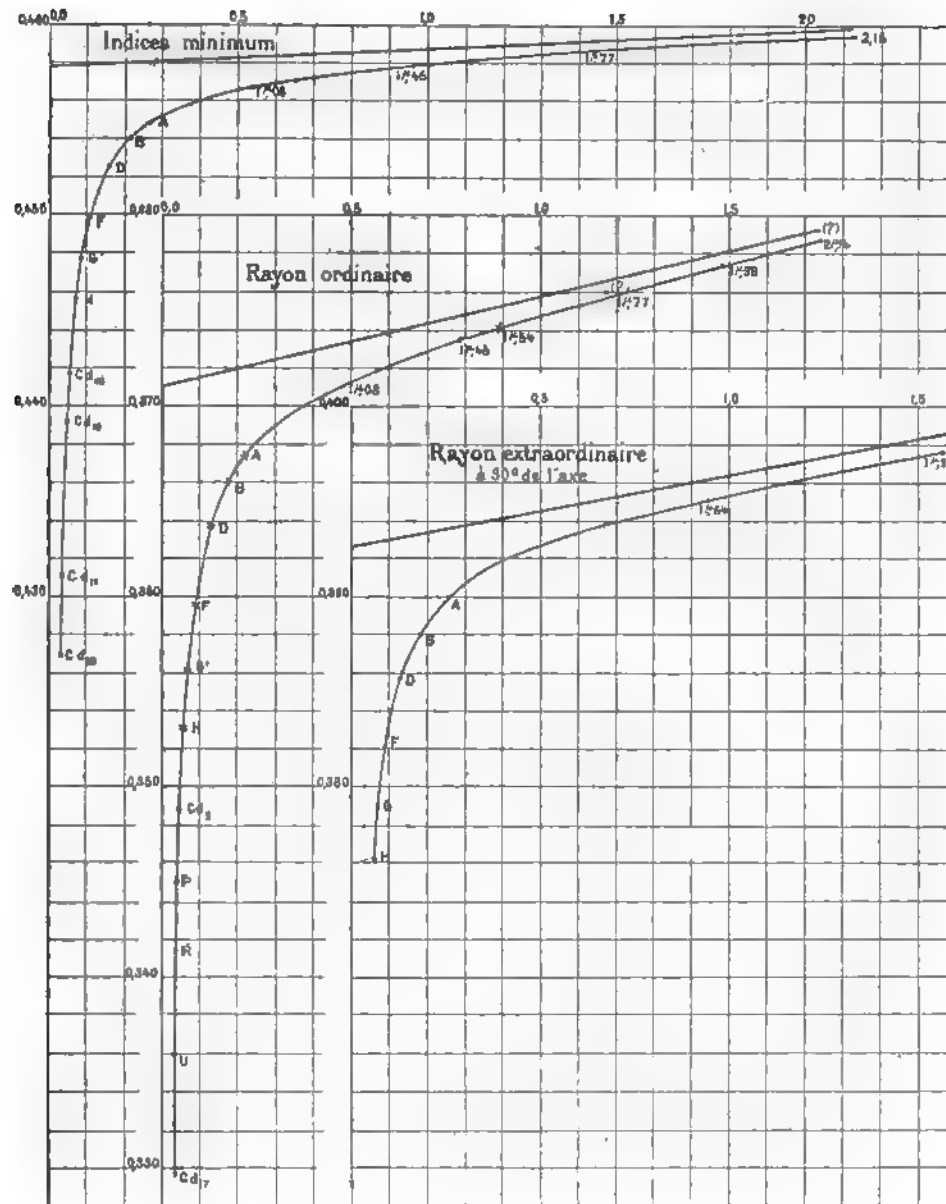
*Rayon extraordinaire.* — La preuve fournie par le rayon extraordinaire n'est pas moins catégorique. Dans l'hypothèse de Neumann, le coefficient  $c$  devrait conserver la valeur  $c_e$ ; dans celle de Fresnel, il doit prendre successivement les valeurs  $c_e$ ,  $c_{30}$ ,  $c_0$  quand l'angle que le rayon fait avec l'axe prend les valeurs  $90^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$ ,  $0^{\circ}$ . Il en résulte, dans les deux hypothèses, des valeurs de  $cl^2$  dont les différences sont du même ordre que pour le rayon ordinaire. Ici encore, l'expérience donne raison à Fresnel d'une façon absolue.

99. La discussion numérique, que je n'ai pas voulu négliger parce qu'elle présente toujours l'intérêt de la précision, n'est même pas nécessaire à la démonstration. Les tracés graphiques suffisent en raison de la netteté des faits (*fig. 20*). La valeur de  $c$  est, en effet, le coefficient angulaire de l'asymptote non verticale de la courbe  $\frac{1}{n^2} = f(l^2)$ . A l'échelle du dessin (<sup>1</sup>), les erreurs d'observation sont environ de  $1^{\text{mm}}$  pour les radiations calorifiques. Pour le rayon ordinaire, les points  $\text{H}^{\alpha}$ ,  $\text{H}^{\beta}$ , A, B, D, F, G', H marqués d'une croix ont été observés à  $90^{\circ}$  et à  $30^{\circ}$  de l'axe. On voit avec quelle certitude ces coefficients angulaires se conforment aux conséquences de l'hypothèse de Fresnel, contraire ment à celle de Neumann.

(<sup>1</sup>) Mon dessin a été réduit de  $\frac{1}{2}$  par la gravure



Fig. 20.



## INCOMPRESSIBILITÉ DE L'ÉTHER.

100. Je l'ai déjà dit (n° 53), sur ce point je ne puis conclure, mais je tiens à montrer combien mes expériences approchent de la solution.

Suivant que l'éther est incompressible ou, au contraire, infiniment compressible, on obtient (n° 51) les formules

$$(1) \quad c_1 = c_o \cos^2 \omega + c_e \sin^2 \omega \quad (\text{éther incompressible}),$$

$$(2) \quad ac_2 = a_o c_o \cos^2 \omega + a_e c_e \sin^2 \omega \quad (\text{éther compressible}).$$

Je remplace dans ces formules  $\omega$  par  $30^\circ$ ,  $a_o$ ,  $a_e$ ,  $c_o$ ,  $c_e$  par les valeurs précédentes et  $a$  par sa valeur

$$a = a_o \cos^2 \omega + a_e \sin^2 \omega.$$

J'obtiens pour  $c$  les deux valeurs

$$(1) \quad c_1 = + 0,00377,$$

$$(2) \quad c_2 = + 0,00360.$$

Or, pour la raie de longueur d'onde  $1^{\mu},98$  et l'angle de  $30^\circ$ , on a  $l^2 = 1,566$ , et il en résulte pour le terme  $cl^2$  les valeurs

$$c_1 l^2 = + 0,00590 \quad (\text{éther incompressible}),$$

$$c_2 l^2 = + 0,00563 \quad (\text{éther compressible}),$$

$$\text{Différence : } \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = + 0,00027.$$

Il en résulte sur  $n$  la différence

$$n_2 - n_1 = + 0,0006.$$

Elle est à la rigueur accessible à l'expérience, puisque l'erreur d'observation est de 2 à 3 unités du quatrième chiffre décimal. Mais, si l'on tient compte de l'indécision qui règne sur chacun des nombres qui servent à calculer  $c_1$  et  $c_2$ , on comprendra que cette différence ne suffit pas pour trancher la question qui nous occupe. On voit aussi qu'il suffirait de pouvoir pousser les déterminations un peu plus avant dans le

spectre calorifique, de perfectionner un peu les méthodes d'observation ou seulement de trouver un cristal plus favorable encore que le spath pour arriver à une conclusion. Qu'il nous soit donc permis d'espérer connaître aussi un jour la solution de ce nouveau problème si important par ses liens avec toutes les branches des Sciences physiques.





---

# TABLE DES MATIÈRES

## DU TOME SEPTIÈME.

---

|  | Pages |
|--|-------|
| Sur les surfaces dont la courbure totale est constante; par M. G. Darboux .....  | 9     |
| Sur une classe particulière d'équations aux dérivées partielles, dont les invariants sont égaux; par M. C. Guichard, chargé d'un cours à la Faculté de Clermont-Ferrand .....  | 19    |
| Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles; par M. Méray, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. Avec la collaboration de M. Riquier, professeur à la Faculté des Sciences de Caen .....                                      | 23    |
| Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres; par M. L. Saint-Loup, professeur à l'École des Sciences d'Alger .....   | 89    |
| Sur une équation du premier ordre et l'équation de Jacobi; par M. Elliot, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon .....   | 101   |
| Note concernant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles; par M. S. Zarembo .....  | 135   |
| Sur les fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce; par M. P. Appell .....  | 143   |
| Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré; par M. E. Blutel, professeur de Mathématiques spéciales au Prytanée militaire .....   | 155   |
| Extension de la méthode de Jacobi pour intégrer une seule équation aux dérivées partielles à une fonction inconnue dont les dérivées y entrent linéairement, au cas d'un système passif d'équations de cette sorte en nombre quelconque; par M. Ch. Méray, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon ..... | 217   |
| Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent, par M. C. Guichard, chargé d'un cours à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand .....  | 233   |

|   | Pages |
|---|-------|
| Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables et sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques; par M. <i>Riquier</i> , professeur à la Faculté des Sciences de Caen..... | 265.  |
| Sur les dissolutions d'un sel magnétique; par M. <i>P. Duhem</i> .....  | 289   |
| Sur le déplacement d'une figure invariable; par M. <i>G. Darboux</i> .....  | 323   |
| Sur une classe de courbes unicursales et sur une propriété du cercle; par M. <i>G. Darboux</i> .....  | 327   |
| Sur les courbes algébriques à torsion constante; par M. <i>Maurice Fouché</i> , agrégé de l'Université, professeur à Sainte-Barbe.....  | 335   |
| Principes généraux d'une théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides; par M. <i>M. Brillouin</i> , maître de Conférences à l'École Normale supérieure.                                | 345   |
| Sur une transformation de mouvement; par M. <i>Dautheville</i> , professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.....   | 361   |

## SUPPLÉMENT AU TOME VII.

|  |     |
|--|-----|
| Mémoire sur l'Optique : Influence du terme de dispersion de Briot sur les lois de la double réfraction; par M. <i>E. Carvallo</i> , professeur au Lycée Saint-Louis..... | S.3 |
|--|-----|













